Math F 429

Math. P.

R

Unterhaltungen

eines

Lehrers mit seinen Schülern

über

stereometrische Wahrheiten.

Herausgegeben

von

D. J. P. Pöhlmann.

Erlangen,
bey Johann Jakob Palm 1815.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

durch seltene Geistes- und Herzensbildung

sich auszeichnenden

Fraülein

Agnes v. Wendt

zu Erlangen

zum

Beweise

seiner

ungeheucheltsten Hochachtung

und

innigsten Verehrung

gewidmet

vom

Verfasser.

Vorrede.

Wenn es auch dem geübten Denker leicht wird, bloß in Gedanken die Flächenfiguren auf alle mögliche Arten zusammen zu setzen, und so die mathematischen Körper selbst zu construiren; so ist dieses doch dem Anfänger im Denken nicht leicht möglich, und ich getraue mir unter hundert Knaben des Alterts, wie ich sie annehme, keine zwey zu finden, die sich deütliche Vorstellungen von den mathematischen Körpern machen können, wenn ihnen diese nicht — in minderer oder größerer Vollkommenheit — vor Augen gelegt werden. Ich habe deßhalb in diesen Unterhaltungen die mathematischen Körper als gegeben angenommen und von diesen die Begriffe abstrahiren lassen. Sollte dieß hier und da ein Lehrer tadeln, so werden es dagegen gewiß zehn andere gut heißen. Um aber meinen Zweck, meinen Schülern überall deütliche Vorstellungen und Begriffe zu verschaffen, desto sicherer zu erreichen, mußte ich mich, außer verschiedenen andern Versinnlichungsmitteln, der wirklichen mathematischen Körper bedienen, da ich bloße Zeichnungen dazu nicht tauglich fand, weil sie die Körper nicht von allen Seiten darstellen, folglich weder die Lage der

der Flächen, noch die Linien, wo sich dieselben schneiden, gehörig versinnlichen können.

Der ganze stereometrische Versinnlichungs-Apparat, den ein Lehrer, der sich der vorliegenden Unterhaltungen bedienen will, bey der Hand haben muß, besteht aus folgenden Stükken:

Nro. 1. Zwei dünne Bretchen, oder auch 2 Stükkchen Pappe, jedes in der Figur eines Rechtekks, um damit die verschiedenen Lagen, die 2 Ebenen gegen einander haben können, zu versinnlichen.

Nro. 2. Ein kleiner Maaßstab, auf welchem 4 Zoll, wovon einer wieder in 10 gleiche Theile getheilt ist, abgestochen sind.

Nro. 3. Ein dreyseitiges Prisma, 3 Zoll in der Höhe haltend.

Nro. 4. Ein vierseitiges, 2 Zoll hohes Prisma. NB. Diese Nummer macht zugleich einen Theil von Nro. 8 aus.

Nro. 5. Ein fünfseitiges, 3 Zoll hohes Prisma.

Nro. 6. Ein gerades Parallelepipedum. NB. Auch diese Nummer macht einen Theil von Nro. 8. aus.

Nro. 7. Ein schiefes Parallelepipedum, mit dem vorhergehenden gleiche Höhe und Grundflächen habend.

Nro. 8. Ein zerschnittener Würfel, dessen Theile folgende sind:

a) Ein größerer Würfel, bezeichnet mit B^3.

b) Ein kleinerer Würfel, bezeichnet mit A^3.

c) Drey größere Parallelepipeda, wovon jedes zur Grundfläche die Fläche des Würfels a, und zur Höhe die Seite des Würfels b hat.

d) Drey kleinere Parallelepipeda, wovon jedes zur Grundfläche ein Quadrat = der Fläche des Würfels b, und zur Höhe die Seite des Würfels a hat. NB. Durch Hülfe dieser Nummer kann man den Lehrsatz: Der Cubus einer zweitheiligen Wurzel A + B bestehet aus den Würfeln beyder Theile, aus B^2 A drey Mahl genommen, und aus A^2 B auch drey Mahl genommen, so gut versinnlichen, daß ihn jeder nur etwas fähige Knabe sehr leicht verstehen und eben so leicht im Gedächtniße behalten kann.

Nro. 9. Ein in drey gleiche Pyramiden zerschnittener Würfel in einem Futterale.

Nro. 10. Sechzehn Würfel, wovon jeder einen Cubikzoll darstellt.

Nro. 11. Sechzehn kleine dreyseitige Prismen, wovon je 2 und 2, gehörig an einander gelegt, einen Würfel von der Größe eines der vorhergehenden bilden. Durch Hülfe dieser und der vorhergehenden Nummer kann man eine Menge prismatischer Körper bilden, und dann ihren Inhalt von den Schülern finden lassen.

Nro. 12. Ein würfliches Gefäß, das gerade einen Cubikzoll hält. Es dient bey verschiedenen Experimenten als Maß.

Nro. 13. Ein dreyseitiges, 2 Zoll hohes Prisma von Pappe.

Nro. 14. Ein vierseitiges, ebenfalls aus Pappe verfertigtes, Prisma, mit dem vorigen gleiche Grundfläche und Höhe habend. Durch Hülfe dieser beyden Nummern, die mit Streusand u. d. gl. angefüllt werden können, wird der Lehrsatz bestätigt: Prismen von gleichen Höhen und Grundflächen haben gleichen körperlichen Inhalt.

Nro. 15. Ein gerader Cylinder, 1 Zoll im Durchmesser, und 2 Zoll in der Höhe haltend.

Nro. 16. Ein dergleichen Körper, an dem die Axe versinnlicht ist.

Nro. 17. Ein sogenannter cylindrischer Ring (eine Röhre), der, mit Nro. 15. vereinigt, einen Cylinder darstellt, der 2 Zoll hoch und 2 Zoll dick ist.

Nro. 18. Ein hohler Cylinder von Blech, congruent mit Nro. 17 + 15.

Nro. 19. Ein schiefer Cylinder.

Nro. 20. und 21. Zwey dreyseitige Pyramiden auf congruenten Grundflächen und von einerley Höhe. Die Grundfläche dieser Pyramiden ist ein rechtwinkeliges Dreyekk, dessen Grundlinie Zwey, dessen Höhe Einen Zoll hält.

Nro. 22. Eine dreyseitige Pyramide mit den vorhergehenden gleiche Höhe (3 Zoll), aber eine halb so große Grundfläche habend. Die

Grund-

Grundfläche dieser Pyramide ist congruent mit der Grundfläche eines Stückes von Nro. 11.

Nro. 23. Eine vierseitige Pyramide, mit der Grundfläche parallel durchschnitten.

Nro. 24. Eine fünfseitige Pyramide, mit Nro. 5. gleiche Grundfläche und Höhe habend.

Nro. 25. Eine vierseitige Pyramide von Pappe, mit Nro. 14. gleiche Grundfläche und Höhe habend.

Nro. 26. Eine dreyseitige Pyramide von Pappe, mit der vorhergehenden gleiche Grundfläche und Höhe habend.

Nro. 27. Eine vierseitige Pyramide, mit Nro. 25. gleiche Höhe, aber eine noch einmal so große Grundfläche habend.

Nro. 28. Eine vierseitige Pyramide von Pappe, gleiche Grundfläche mit Nro. 25, aber die doppelte Höhe habend. NB. Mit den 4 letzten Nummern, welche mit feinem Sande und dergl. angefüllt werden können, werden die Lehrsätze, die das Verhältniß der Pyramiden zu einander angeben, bestätigt.

Nro. 29. Ein dreyseitiges, in 3 gleiche Pyramiden zerschnittenes, Prisma.

Nro. 30. Ein gerader Kegel, im Durchmesser und in der Höhe 2 Zoll haltend.

Nro. 31. Ein dergleichen, mit der Grundfläche parallel durchschnitten. Der obere Stükk ist 2 Zoll hoch, und der Durchmesser der Grundfläche hält 1 Zoll.

Nro. 32. Ein schiefer Kegel.

Nro. 33. Eine Kugel, 2 Zoll im Durchmesser haltend. Durch Hülfe der 18ten, 30sten und 33sten Nummer wird gezeigt, daß sich ein Cylinder, eine Kugel und ein Kegel, wenn sie einerley Höhe und Durchmesser haben, wie 3, 2 und 1 zu einander verhalten.

Nro. 34. Eine, der vorhergehenden gleiche Kugel in zwey Hälften zerschnitten. Auf der einen Durchschnittsfläche ist der Mittelpunct der Halb- und Durchmesser sinnlich dargestellt.

Nro. 35. Eine Kugel, 1 Zoll im Durchmesser haltend.

36 — 39. Ein Tetraëdrum, Oktaëdrum, Dodecaëdrum und Ikosaëdrum.

Nro. 40. Ein eiserner Stift mit einer kleinen Handhabe zu verschiedenem Gebrauche.

Nro. 41. a) Repräsentanten der Grundfläche und der Axe eines geraden Cylinders. Dieß sind 2 kleine hölzerne Scheiben, die in ihren Mittelpunkten durch einen senkrecht darauf stehenden Stift mit einander verbunden sind.

Nro. 41. b) Eine kleine Scheibe, auf die Nro. 40. schief gestellt wird, um die Lage der Axe eines schiefen Cylinders zu versinnlichen.

Nro. 42. Eine Vorrichtung zur Versinnlichung des Satzes: Eine Pyramide entsteht, wenn ꝛc. Um diese Nummer zu verfertigen, zeichnet man sich eine regelmäßige Figur, z. B. ein reguläres Sechsekk auf ein Stükkchen Pappe, zieht durch jede Ekke dieser Figur einen Faden und vereinigt dann die 6 Fäden in willkührlicher doch gleicher Entfernung vom Mittel-

tel-

telpunkte des Sechsecks durch einen Knoten, so daß sie dann die 6 Seitenlinien einer sechsseitigen Pyramide, deren Gipfel in erwähntem Knoten gedacht wird, vorstellen.

Nro. 43. Repräsentanten mehrerer, um einen Punkt herum liegenden, ebenen Winkel, die Entstehungsart eines körperlichen Winkels anschaulich zu machen.

Nro. 44. a) Repräsentant eines Halbkreises, der sich um seine Axe bewegt, zur Versinnlichung des Satzes: Eine Kugel entsteht, wenn ꝛc. Diese Nummer läßt sich von Draht sehr leicht verfertigen.

Nro. 44. b) Repräsentant eines Winkels, der, mit Nro. 40. vereinigt, einen rechtwinklichen Triangel bildet, welcher sich um einen seiner Katheten bewegt, zur Versinnlichung des Satzes: Ein Kegel entsteht, wenn ꝛc. Auch diese Nummer wird von Draht leicht verfertigt.

Nro. 45. Ein in 4 Dreyekke zerschnittenes reguläres Sechsekk. Mit dieser Nummer kann man sinnlich zeigen, 1) daß das reguläre Sechsekk gerade noch Ein Mahl so groß ist als das in dem nämlichen Kreise beschriebene Dreyekk: Denn wenn man die Dreyekke m, n, o (Fig. 11.) mit ihren 6ekkswinkeln um Einen Punkt herum legt, so bilden sie gerade ein Dreyekk a. 2) daß drey Sechsekkswinkel nicht zusammenpassen, um einen körperlichen Winkel damit zu bilden.

Nro. 46. Repräsentanten der Seitenflächen von No. 6.

Nro. 47. Repräsentanten der Seitenflächen von No. 15.

Diesen

Diesen Apparat läßt die Palmische Buchhandlung in Menge verfertigen, was sie, da sie auf großen Gewinn dabey Verzicht leistet, in den Stand setzt, diese 47 Nummern, von denen die meisten fein lakkirt und mehrere in besondern Futteralen sind, für 9 fl. rhn. oder 5 Thlr. sächs. zu liefern. Das Ganze befindet sich in einem Kästchen zum Versenden wohl gepakkt. Liebhaber, die sich nicht directe an die Palmische Buchhandlung dahier wenden wollen, können diesen Apparat durch jede ihnen nahe gelegene gute Buchhandlung beziehen, nur müssen sie sich dann eine kleine Erhöhung des Preises gefallen lassen. Wer sich ihn nicht selbst nothdürftig verfertigen kann, erhält ihn dann immer noch wohlfeiler, als wenn er wegen eines einzelnen Exemplars Drechsler, Schreiner, Schlosser, Papparbeiter und Lakkirer seines Wohnorts erst in Bewegung setzen müßte.

In der ersten Hälfte des zweyten Bändchens der ersten Anfangsgründe der Geometrie ꝛc. (von welchem Werkchen die 2te Hälfte des 2ten Bändchens in den vorliegenden Unterhaltungen immer das 3te Bändchen genannt wird,) ist pag. 279 ein bedeütender Fehler übersehen worden, welchen ich hier bemerken muß. Es müssen nämlich auf der 9ten Zeile von unten nach dem Worte Vielekks noch die zwey Worte, weniger zwey, stehen. Einige andere, weniger bedeütende, Druckfehler wird der sachkundige Lehrer leicht selbst verbessern können.

Erlangen, den 20. August 1814.

Der Verfasser.

Inhaltsanzeige.

			Seite
1ter Satz.		Ein Prisma ist 2c.	1
2ter	—	Ein Parallelepipedum ist 2c. Eine besondere Art von Parallelepipeden ist der Würfel.	11
3ter	—	Ein Cylinder ist 2c.	19
4ter	—	Die Höhe eines Prisma ist 2c.	34
5ter	—	Alle prismatische Körper von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich	38
6ter	—	Eine Pyramide ist 2c.	47
7ter	—	Ein Tetraëdrum ist 2c.	56
8ter	—	Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich	58
9ter	—	Eine Kugel ist 2c.	65
10ter	—	Ein körperlicher Winkel ist 2c.	67
11ter	—	Ein regulärer Körper ist 2c.	75
12ter	—	Von drey ebenen Winkeln, die einen körperlichen bilden, sind jede zwey zusammengenommen größer als der dritte	77
13ter	—	Drey oder mehr ebene Winkel, die einen körperlichen bilden, sind zusammen genommen kleiner als vier rechte	84
14ter	—	Es kann nicht mehr als die 5 bekannten regulären geometrischen Körper geben	86
15ter	—	Zur Ausmessung der Körper braucht man einen Würfel	91
16ter	—	Ein rechtwinkeliges Parallelepipedum auszumessen	95

17ter

		Seite
17ter Satz.	Den körperlichen Inhalt eines Würfels zu finden	99
18ter —	Den körperlichen Inhalt eines schiefwinkeligen Parallelepipedums zu finden	108
19ter —	Den körperlichen Inhalt eines dreyseitigen Prismas zu finden	127
20ter —	Den körperlichen Inhalt eines vielseitigen Prismas zu finden	130
21ter —	Den körperlichen Inhalt eines Cylinders zu finden	137
22ter —	Den körperlichen Inhalt eines cylindrischen Ringes (einer Röhre) zu finden	139
23ter —	Eine dreyseitige Pyramide ist das Drittel von ꝛc.	144
24ter —	Eine dreyseitige Pyramide auszurechnen	148
25ter —	Eine vielseitige Pyramide auszurechnen	152
26ter —	Einen Kegel auszurechnen	158
27ter —	Alle prismatischen Körper verhalten sich zu einander, wie ihre Höhen, wenn ꝛc.	161
28ter —	Cylinder von gleicher Höhe verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ꝛc.	166
29ter —	Pyramiden von gleichen Höhen verhalten sich ꝛc.	169
30ter —	Kegel von gleicher Höhe verhalten sich ꝛc.	171
31ter —	Eine Kugel ist 2/3 von einem Cylinder, der ꝛc.	173
32ter —	Den körperlichen Inhalt und die Oberfläche einer Kugel zu finden	181
33ter —	Der Kugel Oberfläche ist 4mal so groß als ihr größter Kreis	196
34ter —	Die Kugel verhält sich zu dem Würfel ihres Diameters wie 157:300	197
Anhang.	. . . . . .	207

Erster Satz.

Erklärung.

L. (, welcher Nro. 1. vor sich hat.) Diese zwey Stückchen Pappe wollen wir uns jetzt ganz ohne Dicke, folglich als bloße Flächen, und zwar als gerade Flächen oder Ebenen denken, und sie daher auch so nennen. Ich stelle also jetzt (beyde Flächen senkrecht aufeinanderstellend) zwey Ebenen auf einander. Wie sie euch auf einander zu stehen scheinen, ob schief oder senkrecht, das wünsche ich von euch zu hören. K. Sie scheinen senkrecht auf einander zu stehen.

L. So habe ich sie auch wirklich auf einander gestellt. Aber wie stehen sie denn wohl (beyde Flächen in eine schiefe Lage gegen einander bringend) jetzt auf einander? K. Schief.

L. (, der beyde Flächen in paralleler Lage übereinander hält.) In welcher Lage mögen sie sich aber wohl jetzt gegen einander befinden? K. In paralleler Lage. (Sie sind einander parallel.)

L. Euer Augenmaß trügt euch auch dieß Mahl nicht. Aber (beyde Flächen schief gegen einander haltend) sind sie jetzt auch noch parallel? K. Bewahre!

L. Warum glaubt ihr nicht, daß jetzt diese Flächen parallel seyn? K. Weil sie hier (zeigend) näher beysammen stehen, als da (zeigend.)

L. Wenn also zwey Ebenen sich gegen einander neigen, oder auf einer Seite einander sich nähern, können sie da wohl parallele Ebenen heißen? K. Nein.

L. Wenn können sie wohl, eurer Meynung nach, nur diese Benennung führen? K. Wenn sie sich auf keiner ihrer Seiten einander nähern *).

L. Nun soll mir jeder von euch diese 2 Ebenen (Nro. 1.) sowohl senkrecht als schief auf einander

*) Ich halte es für besser, Anfängern blos durch Anschauung zu zeigen, was es heiße: ein Paar Ebenen stehen senkrecht, oder schief auf, oder parallel gegen einander, als ihnen folgende Sätze vorzutragen, weil ihnen diese ohne Versinnlichung selten recht verständlich werden:

1) Eine Ebene AB (Fig. 1. Tab. I.) steht auf einer andern Ebene perpendicular, wenn die auf beyder Durchschnitt BC perpendicular in der einen Ebene AB gezogene gerade Linie EF auch in der andern Ebene CD perpendicular ist.

2) Einer Ebene AB (Fig. 2. Tab. I.) Neigung gegen eine Ebene BD ist der spitzige Winkel FEG, welchen zwey Perpendikel einschließen, die in einerley Punkte E des gemeinschaftlichen Durchschnitts BC, der eine EF in der einen, der andere EG in der andern Ebene errichtet werden.

3) Parallele Ebenen heißen diejenigen, welche nie zusammen treffen, so weit man sie auch von allen Seiten erweitern mag.

ander stellen, dann sie parallel über oder neben einander halten. K. (thun dieß.)

L. Jetzt wollen wir den Fußboden, die Decke und die Wände dieses Zimmers als Ebenen betrachten, und nach dem Augenmaße zu beurtheilen suchen, welche Lage je 2 und 2 dieser Ebenen gegen einander haben. Was haben der Fußboden und die Dekke für eine Lage gegen einander? K. Sie sind parallel.

L. Aber diese und diese (auf zwey einander gegen überstehende Wände zeigend) Wand, wie stehen diese gegen einander? K. Auch parallel.

L. Wie steht aber diese Wand (eine zeigend) auf diesem Fußboden? K. Senkrecht.

L. Gut! — Jetzt betrachtet hier diesen Körper (Nro. 3.) und sagt mir, ob ihr nicht ein Paar ebene Flächen an ihm wahrnehmt, die euch parallel zu seyn scheinen. K. Ja, diese zwey (auf a u. b zeigend) scheinen es zu seyn.

L. Sie sind es auch wirklich, und wir haben nun schon Ein Merkmal an diesem Körper aufgefunden. Gebt mir dasselbe noch ein Mahl an. K. Er (dieser Körper) hat ein paar parallele ebene Flächen.

L. Gut! Was für Figuren sind denn diese 2 parallelen Flächen? K. Dreyekke.

L. Rechnet ihr Dreyekke unter die gerad- oder unter die krummlinigen Figuren? K. Unter die geradlinigen.

L. Da wollen wir also merken, daß die parallelen Flächen dieses Körpers hier auch von ge-

A 2 raden

raden Linien begrenzt werden (geradlinige Figuren sind.) Daß man Flächen-Figuren, die einerley Größe und Gestalt haben, folglich einander dekken, congruent nennt, wißt ihr schon. Urtheilt jetzt nach dem Augenmaße und sagt, ob ihr die Flächen a u. b für congruent haltet oder nicht. K. Wir halten sie allerdings dafür.

L. Da irrt ihr euch auch nicht; denn sie würden, wenn man sie auf einander legen könnte, einander wirklich decken. Nun faßt alles zusammen, was ihr an diesen zwey Flächen (auf a und b No. 3. zeigend) durch meine Fragen geleitet, jetzt bemerkt habt, und sagt es mir. K. Sie sind 1) parallel, 2) geradlinig, 3) congruent.

L. Da wollen wir also an unsere schwarze Tafel schreiben: Der Körper P — so wollen wir einstweilen dieses Stückchen Holz nennen — wird begrenzt: 1) von zwey parallelen, geradlinigen und congruenten Flächen (Figuren.) — Hat denn dieser Körper (Nro. 3.) außer den Flächen a und b nicht noch mehrere? K. Ey ja wohl!

L. Wie viel denn? K. Noch drey.

L. Und was für Figuren sind denn, dem Augenmaße nach zu urtheilen, diese drey Flächen? K. Rechtekke.

L. Was haben Quadrate, Rechtekke, Rauten und längliche Rauten noch für einen gemeinschaftlichen Namen? K. Parallelogramme.

L. Diesen Namen wollen wir hier beybehalten. Wie viel Parallelogramme hat also dieser Körper mit zu seinen Grenzen? K. Drey.

L. Al-

L. Also gerade so viel, als jede seiner parallelen Flächen Seiten hat. Ich kann demnach ferner an unsere schwarze Tafel schreiben: 2) von so vielen Parallelogrammen, als jede seiner parallelen Flächen Seiten hat. Jetzt soll mir Carl herlesen, was an der schwarzen Tafel steht, dann will ich es weglöschen, und jeder soll mir es darauf von diesem Körper da (No. 3.) gleichsam ablesen.

Jetzt lasse man alle, oder doch wenigstens mehrere Kinder, der Reihe nach sprechen: Dieser Körper wird begrenzt, 1) von zwey (hier zeigen die Kinder mit dem Finger auf die Flächen a und b) parallelen, geradlinigen und congruenten Flächen (Figuren); 2) von eben so vielen Parallelogrammen (hier zeigen die Kinder die Seitenflächen), als eine der parallelen Flächen Seiten hat.

L. Nun betrachtet einmal diesen Körper (das Stück X. von No. 23. vorlegend) und seht, ob sich an ihm auch alle die Merkmahle vorfinden, welche wir an diesem da (No. 3.) jetzt aufgefunden haben. Vor allem sagt, ob ihr nicht ein Paar Flächen, die parallel zu seyn scheinen, an ihm bemerkt. K. Die Flächen a und b scheinen es ja zu seyn.

L. Sie sind es auch wirklich. Sind sie aber auch geradlinig und einander gleich? K. Geradlinig wohl, aber nicht einander gleich; denn b ist viel größer als a.

L. Da fehlt also diesem Körper da (No. 23. X.) schon ein Merkmahl, welches dieser da (No. 3.) hat, nämlich? K. Die Gleichheit seiner zwey parallelen Flächen.

L. Wie

L. Wie viel Seiten hat denn jede der zwey parallelen Flächen dieses Körpers (No. 23. X.)? K. Vier.

L. Und gerade so viel Flächen sind außer den beyden parallelen Flächen noch an ihm vorhanden. Sind aber diese vier Flächen auch Parallelogramme? K. Nein, es sind Trapezien.

L. Jetzt gebt recht Achtung und sagt mir, auf welchen von diesen beyden Körpern (No. 3. u. No. 23. X.) folgende Beschreibung paßt: Ein Körper, welcher begrenzt wird 1) von zwey parallelen, geradlinigen und congruenten Flächen (Figuren); 2) von eben so vielen Parallelogrammen, als eine seiner parallelen Flächen Seiten hat. K. Diese Beschreibung paßt auf diesen Körper (No. 3. zeigend.)

L. Warum nicht auch auf diesen da? (No. 23. X. zeigend.) K. Weil seine parallelen Flächen nicht congruent, und die übrigen keine Parallelogramme sind.

L. Ihr habt Recht. Wer getraut sich nun aber, mir diesen Körper (No. 3.) gerade so zu beschreiben, wie ich es erst gethan habe? K. Dieß ist ein Körper, welcher begrenzt wird, 1) von ꝛc.

L. Alle die Merkmahle, die ihr mir jetzt von diesem Körper (No. 3.) angegeben habt, muß ich mir denken, sobald jemand den Namen Prisma (Ecksäule) ausspricht. Denn dieses Wort bezeichnet nichts anders, als einen Körper, auf den eure jetzt gegebene Beschreibung paßt. Glaubt ihr nun

wohl,

wohl, daß dieser Körper (No. 23. X.) auch Prisma heißen könne? K. Nein.

L. Warum denn nicht? K. Weil rc.

L. Wenn kann denn ein Körper nur diesen Namen führen? K. Wenn er rc.

L. Nun betrachtet einmahl diesen Körper (No. 5.) und sagt, ob sich nicht ein Paar Flächen an ihm befinden, die auch einander parallel, geradlinig und zugleich congruent zu seyn scheinen. K. Da die Flächen a und b scheinen dieß zu seyn.

L. Sie sind es auch wirklich. Wie viel Seiten hat denn eine von diesen Flächen? K. Fünf.

L. Wenn nun dieser Körper von eben so vielen, also von fünf Parallelogrammen noch begrenzt wäre, wie müßten wir ihn alsdann nennen? K. Prisma.

L. Seht doch, ob wir ihm diesen Namen geben dürfen? K. Ja, das dürfen wir.

L. Aus welchem Grunde glaubt ihr, daß wir dieß thun, ihn also Prisma nennen dürfen? K. Weil rc.

L. Jetzt forscht einmal nach, und seht, ob ihr die Merkmahle eines Prisma auch an diesen Körpern (No. 4. 6. 7. vorlegend) entdekken könnt, oder nicht.

Die Kinder prüfen nun die vorgelegten Körper und sehen, ob die vorhergehende Definition eines Prisma auf jeden derselben passe oder nicht. Dieß ist eine treffliche Uebung der Denkkraft und der Lehrer hat hierbey Gelegenheit zu erfahren, ob die erwähnte Definition von seinen Schülern auch verstanden worden ist, oder nicht.

L. Ihr

L. Ihr habt Recht! dieses (No. 4. 6. 7.) sind lauter Prismen oder prismatische Körper, weil sich ja an jedem derselben die wesentlichen Merkmahle eines Prisma befinden. Denkt euch einmahl die Oeffnungen dieser Gefäße (No. 13. und 14. vorlegend) eben so mit einem Boden verschlossen, wie die andere Seite, so daß wir also einen auf allen Seiten begrenzten Raum, d. h. einen geometrischen Körper erhalten, und sagt, ob es dann nicht auch Prismen wären. K. Ei ja wohl!

L. Wir wollen sie deshalb auch so, oder auch prismatische Gefäße nennen. Nun gebt recht Achtung, ich will einmahl sehen, ob ihr versteht, was ich jetzt sage. Diejenigen zwei Flächen an einem Prisma, welche parallel, geradlinig und congruent sind, heißen dessen Grundflächen, die übrigen Flächen aber nennt man seine Seitenflächen. Nun, Carl, zeige mir geschwind an diesem Prisma (No. 3.) die Grundflächen. K. Zeigt ohne Zweifel die Flächen a und b.

L. Weißt du jetzt, wie man diese zwei Flächen (a und b) hier nennt? K. Grundflächen.

L. Welche Flächen nennt man denn an einem Prisma Grundflächen? K. Diejenigen, welche parallel ꝛc.

L. Nun zeige mir auch die Seitenflächen dieses Prisma. K. (zeigt die Flächen c, d, und e).

L. Was für Figuren müssen wohl allemal die Seitenflächen eines Prismas seyn? K. Alle Mahl Parallelogramme.

L. Jetzt

L. Jetzt zeigt mir an diesen Prismen (No. 4. 6. 7. *) die Grund- und Seitenflächen. K. (thun dieses.)

L. Gut! Die Fläche an einem Körper überhaupt, worauf wir ihn uns als stehend denken, nennen wir seine Grundfläche. Und da wir ein Prisma sowohl auf die eine, als auf die andere seiner zwei parallelen rc. Flächen stellen können, wenn wir es nämlich aufrecht stellen wollen, so heißen eben diese zwey Flächen die Grundflächen.

L. Jetzt betrachtet einmal diese zwey Prismen (No. 3 und 4.) und sagt mir, ob ihr in Ansehung der Zahl ihrer Seitenflächen nicht einen gewissen Unterschied zwischen ihnen wahrnehmt. K. Ja; dieses (Nro. 3.) hat nur drey, dieses aber (No. 4.) hat vier Seitenflächen.

L. Wie könnten wir wohl dieses da (No. 3.) nennen, wenn wir ihm einen Namen, der die Zahl seiner Seitenflächen anzeigte, geben wollten? K. Dreyseitiges Prisma.

L. Gut! Und wie könnten wir dieses (No. 4.) und dieses (No. 5.) nennen? K. Dieses (No. 4. zeigend) könnten wir vier- und dieses andere da fünfseitiges Prisma nennen.

L. Diese Namen gibt man auch diesen Prismen wirklich. Jedes Prisma wird nämlich nach der Anzahl seiner Seiten benannt. Nun sagt mir geschwind wieder, wie man die Grenzen der Flächen benennt. K. Linien.

L. Da

*) Bey No. 6 und 7. lasse man einstweilen die Flächen a und b als Grundflächen annehmen.

L. Da dieses (No. 3.), wie jedes andere Prisma, mehrere Seitenflächen hat; so müssen auch Linien vorhanden seyn, die diese Seitenflächen begrenzen. Dergleichen Linien nun nennt man Seitenlinien, (Seitenkanten) und es haben immer 2 Seitenflächen eine solche Seitenlinie gemein. Wer kann wohl mit einem Finger auf den Seitenlinien dieses Prismas (No. 3.) hinfahren? K. (fahren mit einem Finger auf den Linien, wo die Seitenflächen zusammenstoßen, hin.)

L. Jetzt fahrt auch mit einem Finger auf den Seitenlinien (Seitenkanten) dieser Prismen (No. 5. 6. 7.) hin. K. (thun dieses.)

L. Nun sagt mir, ob bey diesen drey Prismen (No. 5. 6. 7.) die Seitenlinien senkrecht oder schief auf den Grundflächen stehen. K. Bey diesen (No. 5 und 6.) stehen sie senkrecht, bey diesem aber (No. 7.) stehen sie schief auf den Grundflächen *).

L. Jetzt merkt, was ich sage. Prismen, deren Seitenlinien senkrecht auf den Grundflächen stehen, heißen senkrechte oder gerade Prismen. Solche Prismen aber, deren Seitenlinien schief auf den Grundflächen stehen, nennt man schiefe Prismen. Wer ist wohl jetzt im Stande, mir ein schiefes Prisma herzureichen? K. (reicht dem Lehrer No. 7. dar.)

L. Wie nennt man dieses Prisma? K. Schief.

L. Warum führt es diesen Namen? K. Weil seine Seitenlinien schief auf den Grundflächen stehn.

L. Wer

*) No. 7. muß auf der Fläche e oder f stehen.

L. Wer reicht mir aber jetzt ein paar gerade Prismen her? K. (reichen die verlangten Körper dar.)

L. Warum nennt man diese Prismen gerade oder senkrecht? K. Weil ihre Seitenlinien senkrecht auf den Grundflächen stehen.

L. Wer sagt mir denn jetzt, wie wir die Prismen eintheilen können, wenn wir auf die Richtung ihrer Seitenlinien gegen die Grundflächen Rücksicht nehmen? K. In gerade und schiefe.

L. Wie können wir sie aber eintheilen, wenn wir auf die Anzahl ihrer Seiten Rücksicht nehmen? Ehe ihr antwortet, bedenkt, daß wir die geradlinigen Flächenfiguren in drey- vier- und vielseitige eingetheilt haben. K. Wir denken, daß wir auch die Prismen in drey- vier- und vielseitige Prismen eintheilen können.

L. Da irret ihr euch nicht, wenn ihr so denkt.

Zweyter Satz.

Erklärung.

L. Wir wollen heute abermahls diese prismatischen Körper (No. 3. 4. 5. 6. 7. vorlegend) zum Gegenstande unserer Unterhaltung machen. Betrachtet doch einmahl dieses Prisma (No. 4.) genau und sagt, was euch seine Grundflächen für Figuren zu seyn scheinen. K. Quadrate.

L. Rich-

L. Richtig! dergleichen Figuren sind es. Sind denn aber wohl die Grundflächen dieses Prisma (auf die Flächen a u. b No. 6. zeigend) auch Quadrate? K. Nein.

L. Was sind es denn für Figuren? K. Rechtekke.

L. Was führen aber Quadrate und Rechtekke für einen gemeinschaftlichen Namen, der jedoch den Trapezien nicht mit zukommt? K. Parallelogramme.

L. Worin stimmen also die Grundflächen dieser zwey Prismen (No. 4 u. 6.) mit einander überein? K. Darin, daß sie Parallelogramme sind.

L. Kann ich denn wohl auch von diesen zwey Prismen (No. 3 und 5 ergreifend) sagen, daß sie Parallelogramme zu Grundflächen haben? K. Nein.

L. Von welchen dieser fünf Prismen (No. 3. 4. 5. 6. 7.) kann ich dieses nur behaupten? K. Von diesen da (No. 4. 6. 7.)

L. Nun merkt! Ein Prisma, welches Parallelogramme zu Grundflächen hat, führt einen besondern Namen. Es heißt nämlich P a r a l l e l e p i p e d u m. Jetzt sucht mir geschwind aus diesen Körpern (No. 3. 4. 5. 6. 7. unter einander legend) die Parallelepipeda heraus. K. (suchen No. 4. 6. 7. heraus.)

L. Wie heißt jedes von diesen drey Prismen? K. Parallelepipedum.

L. Wenn führt ein Prisma diesen Namen? K. W e n n e s P a r a l l e l o g r a m m e z u G r u n d f l ä c h e n h a t.

L. Ist dieses Prisma (No. 3. ergreifend) auch ein Parallelepipedum? K. Nein.

L. War-

L. Warum dürfen wir es nicht so nennen? K. Weil es Dreyekke, aber keine Parallelogramme zu Grundflächen hat.

L. Wenn ich nun sagte: jedes Prisma ist ein Parallelepipedum, hätte ich da Recht? K. Nein.

L. Wie aber, wenn ich spräche: jedes Parallelepipedum ist ein Prisma, hätte ich dann Recht? K. Ja wohl.

L. Freylich! Ein Parallelepipedum ist eine besondere Art von Prismen. Und da bey einem solchen Körper, ich meyne bey einem Parallelepipedum, jede zwey einander gegenüberstehende Flächen parallel sind, so kann man auch jedes Paar solcher Flächen als die Grundflächen ansehen. Also hier (No. 6.) können wir nicht nur die Flächen a und b, sondern auch noch 1) die Flächen c und e, 2) die Flächen d und f als die Grundflächen annehmen. Wer verstanden hat, was ich jetzt gesagt habe, der wird mir gleich antworten können, wenn ich frage: welches sind hier an diesem Körper (No. 4.) die Grundflächen? K. Wir können 1) die Flächen a und b, 2) die Flächen d und f, 3) die Flächen c und e dafür annehmen.

L. Richtig! denn auf jeder dieser Flächen können wir uns den Körper als stehend denken. Wie nannten wir denn vorhin dieses Prisma (No. 7.), um anzuzeigen, daß seine Seitenlinien schief auf seinen Grundflächen stehen? K. Ein schiefes Prisma.

L. Jetzt denkt einmahl nach und seht, ob man ihm diese Benennung noch geben kann, wenn ich die Fläche c (d) als Grundfläche annehme und es,

wie ich jetzt thue, auf dieselbe stelle. K. Jetzt kann man ihm diese Benennung nicht mehr geben.

L. Warum nicht? K. Weil ja seine Seitenlinien jetzt nicht schief, sondern senkrecht auf den Grundflächen stehen.

L. Das war mit Ueberlegung geantwortet, und ihr seht, daß wir diesen Körper (No. 7.) bald als ein schiefes, bald als ein gerades Parallelepipedum betrachten können, nachdem wir ihn nämlich auf eine von diesen, oder diesen (zeigend) Flächen stellen. — Nun merkt noch Folgendes. Da jedes Prisma entweder gerade, oder schief, und jedes Parallelepipedum ein Prisma ist; so muß nothwendig ein Parallelepipedum auch entweder gerade, oder schief seyn. Dieß (No. 4 und 6.) sind gerade, und dieses da (No. 7.) ist, wenn wir a und b, oder e und f zu Grundflächen annehmen, ein schiefes Parallelepipedum. — (No. 7. auf die Fläche c legend.) Jetzt sagt mir geschwind, welches von diesen beyden Parallelepipeden (No. 6 und 7.) gerade ist. K. Jetzt sind beyde gerade.

L. Aber welches hat Rectangel (Rechtecke) nicht nur zu Seiten- sondern auch zu Grundflächen? K. Dieses da (No. 6.)

L. Weil dieses Parallelepipedum (No. 6.) nicht nur gerade ist, sondern auch Rechtekke zu Grundflächen hat, so heißt es rechtwinkelig. Glaubt ihr wohl, daß auch dieß (No. 7.) ein rechtwinkeliges Parallelepipedum sey? K. Nein.

L. Warum haltet ihr es nicht dafür? K. Weil es keine Rechtekke zu Grundflächen hat.

L. (No.

L. (No. 7. auf die Fläche a (b) stellend.) Nun wird es aber rechtwinkelig heißen können, denn jetzt hat es Rechtekke zu Grundflächen? K. Nein, es kann nicht so heißen, weil es jetzt nicht gerade ist.

L. Gut! Ihr seht also ein, daß ein Parallelepipedum nothwendig 1) gerade seyn, 2) Rechtekke zu Grundflächen haben müsse, wenn es rechtwinkelig heißen soll. Da aber ein gerades Parallelepipedum, welches Rechtekke zu Grundflächen hat, auch Rechtekke zu Seitenflächen haben, also in 6 Rechtekke eingeschlossen seyn muß; so kann man auch sprechen: ein rechtwinkeliges Parallelepipedum ist ein solches, welches von 6 Rechtekken begrenzt wird. — Wenn ihr bedenkt, daß Quadrate im Grunde auch Rechtekke sind; so werdet ihr mir sagen können, ob dieser Körper (No. 4.) ein rechtwinkeliges Parallelepipedum ist oder nicht. K. Er ist eins.

L. Gebt mir den Grund dieser Behauptung an. K. (thun dieß.)

L. Sollte wohl dieß (No. 8. B³ vorlegend) auch ein rechtwinkeliges Parallelepipedum seyn? K. Allerdings.

L. Was für Figuren mögen wohl die Flächen seyn, von denen es begrenzt wird? K. Quadrate.

L. Nun könnt ihr mir wohl auch sagen, was, abgesehen von der Größe, zwischen diesen beyden Parallelepipeden (No. 4 und 8. B³) für ein Unterschied statt findet. K. Dieses da (No. 8. B³) ist von lauter Quadraten, dieses aber (No. 4.) nur von zwey Quadraten und dann von 4 Rectangeln eingeschlossen.

L. Richtig! Nun merkt wieder, was ich sage. Ein Parallelepipedum, welches von lauter Quadraten begrenzt wird, oder welches Quadrate sowohl zu Grund- als zu Seitenflächen hat, heißt Würfel. Einer von diesen zwey Körpern (No. 4. und 8. B³) muß also ein Würfel seyn. Sagt mir, welcher es ist. K. Dieser da (No. 8. B³).

L. Kann dieser Körper (No. 6. ergreifend) wohl auch ein Würfel seyn? K. Nein.

L. Warum nicht? K. Weil er nicht von lauter Quadraten begrenzt ist. (Weil er keine Quadrate zu Grund- und Seitenflächen hat.)

L. Wenn wir aber die Fläche c und e zu Grundflächen annehmen, dann sind seine Grundflächen doch Quadrate? K. Aber seine Seitenflächen sind es nicht.

L. Ihr habt Recht. Da werden nun wohl diese Körper (No. 10. vorlegend) auch keine Würfel seyn? K. Ey ja! das sind Würfel.

L. Warum haltet ihr sie dafür? K. Weil sie — wenigstens dem Augenscheine nach — Quadrate sowohl zu Grund- als zu Seitenflächen haben.

L. Richtig! das sind lauter Würfel. Jetzt sagt mir, was man sich überhaupt bey dem Worte Würfel zu denken hat. K. Ein Parallelepipedum, welches Quadrate zu Grund- und zu Seitenflächen hat.

L. Gut! Nun sagt mir doch auch, welches ihr wohl für das größte unter diesen Quadraten (auf die Flächen von No. 8. B3 zeigend) haltet. K. Es scheint eines so groß als das andre zu seyn.

L. Dem

L. Dem ist auch wirklich so. Es kann aber auch gar nicht anders seyn. Denn die Seiten der Grundflächen sind ja auch zugleich Seiten derjenigen Quadrate, welche die Seitenflächen ausmachen. Und Quadrate, die gleiche Seiten haben, müssen ja, wie ihr gelernt habt, einander gleich seyn. Von den Quadraten, die einen Würfel einschließen, könnt ihr also in Ansehung ihres Verhältnisses zu einander behaupten —? K. Daß sie einander gleich seyn müssen.

L. Und wie viel gleiche Quadrate begrenzen alle Mahl einen Würfel? K. Sechs.

L. Recht! daher könnt ihr auch sprechen: ein von sechs gleichen Quadraten eingeschloßner Körper ist ein Würfel. — Nun sagt mir doch, welches hier bei diesem Würfel No. 8. B^5. die Grundflächen und welches die Seitenflächen sind. K. Man kann jede zwei einander gegen überstehende Flächen zu Grundflächen annehmen.

L. Warum glaubt ihr dieses? K. Weil der Würfel ein Parallelepipedum ist, und Sie gesagt haben, daß man bey einem Parallelepipedum jede zwey einander gegen überliegende Flächen zu Grundflächen annehmen könne.

L. Ihr habt einen richtigen Schluß gemacht. Merkt nun noch dieses: Die Seite eines der Quadrate, welche den Würfel begrenzen, nennt man auch die Seite des Würfels. Wenn ich daher fragte: wie groß ist die Seite dieses Würfels (No. 8. B^5)? so müßtet ihr eine von diesen Linien

(irgend eine der Kanten zeigend) messen. Thut dieß ein Mahl. K. (messen).

L. Was meßt ihr jetzt? K. Die Seite dieses Würfels.

L. Und wie lang ist sie? K. Zwey Zoll.

L. Wäre es wohl jetzt nöthig, die übrigen Seiten-Linien auch zu messen, wenn ihr ihre Länge erforschen wolltet? K. Nein.

L. Warum nicht? K. Weil diese Linien alle von gleicher Länge sind, und wir schon eine davon gemessen, und dadurch die Länge aller übrigen erfahren haben. — —

L. Viele Leute sagen, ein Würfel sey viereckig (vier Ekken habend), haltet ihr dieß wohl für richtig? K. Nein.

L. Warum nicht? K. Weil er ja 8 und nicht 4 Ekken hat.

L. Seht doch ein Mahl, wie viel Seiten-Linien (Kanten) ein Würfel hat? K. Zwölf.

L. Wie viel Winkel haben aber alle seine Flächen zusammen genommen? K. Vier und zwanzig.

L. Und was sind das für Winkel? K. Lauter rechte.

L. Wenn ich nun frage: was ist am Würfel 6 Mahl vorhanden, so antwortet ihr —? K. Ein Quadrat.

L. Und was ist 8 Mahl vorhanden? K. Eine Ekke.

L. Und

L. Und was ist 12 Mahl vorhanden? K. Die Seiten-Linie.

L. Und was ist 24 Mahl vorhanden? K. Der rechte Winkel.

Dritter Satz.

Erklärung.

L. Haltet ihr wohl diesen Körper (No. 15.) auch für ein Prisma? K. Nein.

L. Warum denn nicht? Er hat doch hier (a und b zeigend) parallele und congruente Grundflächen? K. Aber das sind ja keine geradlinigen Figuren und seine Seitenflächen sind keine Parallelogramme.

L. Ihr habt allerdings mit gehöriger Überlegung geantwortet, und es scheint, als hättet ihr Recht. Indessen schwebt ihr dennoch in einem Irrthume, welcher daher rührt, weil ihr vergessen oder jetzt nicht bedacht habt, daß wir einen Kreis als ein reguläres Vielekk, folglich als eine geradlinige Figur betrachten können.

Da nun die Grundflächen dieses Körpers (No. 15.) Kreise sind, so können wir auch sprechen: die Grundflächen dieses Körpers sind Vielekke, aber von so viel Seiten, daß wir ihre Zahl nicht angeben können. Und eben so nehmen wir seine Seitenflächen, die uns alle zusammen genommen als eine einzige krumme Fläche erscheinen, für Parallelogram-

me an, deren Zahl wir aber eben so wenig, als die Zahl der Seiten seiner Grundflächen zu bestimmen im Stande sind. Hieraus ist klar, daß wir auch diesen Körper unter die prismatischen Körper rechnen können. Da er aber doch von den übrigen Körpern dieses Namens dadurch unterschieden ist, daß seine Grundflächen Kreise sind; so hat man ihm auch einen besondern Namen, nämlich den Namen Cylinder (Walze) gegeben.

L. Ihr seht also jetzt hier (auf No. 15. zeigend)? K. Einen Cylinder.

L. Und unter welche Körper gehört ein Cylinder? K. Unter die prismatischen.

L. Wenn nennt man aber erst einen prismatischen Körper Cylinder? K. Wenn seine Grundflächen Kreise sind.

L. Hier habe ich einen Körper (No. 31. X. vorlegend), dessen Grundflächen Kreise sind: darf ich ihn wohl Cylinder nennen? K. Ja *).

L. Ihr sagtet erst, ein Cylinder gehöre unter die Prismen. Ein Prisma aber muß gleiche und ähnliche Grundflächen haben. Ist dieß wohl bey diesem Körper der Fall? K. Nein.

L. Haltet ihr ihn nun noch für einen Cylinder? K. Nein.

L. Warum nicht? K. Weil seine Grundflächen nicht einander gleich sind.

L. Frey-

*) Ich setze die gewöhnliche Antwort her, bisweilen sagen die Kinder freylich auch: nein!

L. Freylich! Ein Cylinder muß nothwendig gleiche Kreise zu Grundflächen haben, und deswegen durchaus von einerley Dicke seyn, welches aber der Fall bey diesem Körper (No. 31. X.) hier nicht ist. Welcher von diesen beyden Körpern (No. 15. und 31. X.) ist also wohl nur ein Cylinder? K. Dieser (auf No. 15. zeigend).

L. Warum kann denn dieser (No. 31. X.) da nicht Cylinder genannt werden? K. Weil seine Grundflächen nicht einander gleich sind.

L. Gut! Jetzt sagt, wie ihr die Punkte a u. b, die hier auf den beyden Grundflächen dieses Cylinders (No. 15.) bemerkt sind, und die von der Peripherie überall gleich weit abstehen, nennen wollt. K. Mittelpunkte.

L. Von welchen Flächen sind es denn die Mittelpunkte? K. Von den Grundflächen dieses (eines) Cylinders.

L. Wenn ihr die Mittelpunkte der Grundflächen dieses Cylinders durch eine einzige gerade Linie mit einander verbinden wolltet, könntet ihr diese Linie außen über die Oberfläche dieses Körpers, etwa so (zeigend), wegziehen? K. Nein.

L. Warum nicht? K. Weil dieß nicht eine einzige, sondern drey gerade Linien gäbe.

L. Welchen Weg müßte denn die gerade Linie nehmen, die die genannten zwey Punkte verbinden sollte? K. Sie müßte mitten durch den Cylinder gehen.

L. Recht!

L. Recht! Sie müßte den Weg nehmen, den hier dieser Stift (No. 40. durch No. 16. stekkend) bey diesem Cylinder (No. 16.) nimmt. Denkt eüch jetzt ein Haar durch diesen Cylinder (No. 15.) von dem Punkte a ohne alle Krümmung bis zu dem Punkte b gezogen, so habt ihr das Bild einer geraden Linie, welche die Mittelpunkte der Grundflächen dieses Cylinders mit einander verbindet, und welche den Namen Axe des Cylinders führt. Da ich diesen Namen in der Folge bisweilen gebrauchen werde, so sagt mir, ehe ich weiter fortfahre, was er bedeütet. K. Er bedeütet diejenige gerade Linie, welche die Mittelpunkte der Grundflächen eines Cylinders mit einander verbindet.

L. Kann ich denn wohl diesen Stift hier (No. 40. in No. 16. stekkend) die eigentliche Axe dieses Cylinders nennen? K. Nein.

L. Warum nicht? K. Weil es nicht eine bloße Linie, sondern ein Körper ist.

L. Wie aber, wenn wir uns unter diesem Stifte eine bloße gerade, die Mittelpunkte dieser beyden Flächen (a u. b) verbindende, Linie dächten? K. Ja, dann könnten wir ihn freylich die Axe dieses Cylinders nennen.

L. Als eine solche Linie denkt eüch jetzt diesen Stift, und sagt mir, um was ich diesen Cylinder jetzt drehe (den Cylinder um den Stift drehend). K. Um seine Axe.

L. Richtig! Kann wohl eines von eüch diesen Cylinder (No. 15.) auch so drehen, daß man

sagen

sagen kann: er bewegt sich um seine eigene Axe? K. (machen den Versuch. Rükken sie, was gewöhnlich der Fall ist, den Cylinder dabey aus seiner Stelle; so sage man ihnen, daß dieß nicht geschehen dürfe, und die Axe des Cylinders auf dem Tische fest stehend gedacht werden müsse, wenn sich der Cylinder nur bloß um seine Axe bewegen soll).

L. (, welcher No. 41. a vor sich hat.) Jetzt denkt euch diesen hölzernen Stift als die Axe, und diese zwey Scheiben als die Grundflächen eines Cylinders, und sagt, wie die Axe auf den Grundflächen steht. K. Senkrecht.

L. Glaubt ihr nicht, daß sie auch anders darauf stehen könne? K. Ja.

L. Wie denn? K. Schief.

L. Recht! Sie könnte auch so (No. 40. schief auf No. 41. b setzend) stehen. Sagt mir jetzt, wie die Axe eines Cylinders auf den Grundflächen stehen kann. K. Entweder senkrecht oder schief.

L. Bey welchem dieser zwey Cylinder (No. 15. und 19.) mag wohl die Axe schief und bey welchem senkrecht auf den Grundflächen stehen? K. Hier (No. 15. zeigend) steht sie senkrecht, und hier (No. 19. zeigend) schief darauf.

L. Was für eine Benennung mag daher wohl jeder dieser Cylinder führen? K. Dieser (No. 15.) heißt vielleicht ein senkrechter und dieser (No. 19.) ein schiefer Cylinder *).

L. Rich-

*) Diese Antwort werden die Kinder geben, wenn sie den Begriff von einem geraden und schiefen Prisma gefaßt haben.

L. Richtig! so heißt jeder. Aber wer von euch kann mir denn geschwind sagen, was man unter einem senkrechten Cylinder versteht? K. Einen solchen Cylinder, dessen Axe senkrecht auf den Grundflächen steht.

L. Und wer sagt mir, wenn man einen Cylinder schief nennt. K. Wenn seine Axe schief auf seinen Grundflächen steht.

L. (, welcher No. 15. in die Höhlung von No. 17. gestekkt hat.) Was für ein Körper mag denn wohl dieses No. 15. vereinigt mit Nro. 17. *) seyn? K. Auch ein Cylinder.

L. Warum glaubt ihr dieß? K. Weil ꝛc.

L. Aber was für eine Art von Cylinder ist es? K. Ein senkrechter (gerader).

L. (, welcher No. 3. 4. 5. 6. 7. 8. B³. 15. 19. vorgelegt hat.) Hier stehen die Körper, die ihr bisher kennen gelernt habt, neben einander, damit ihr sie alle mit einem Blikke übersehen und mir bey der jetzt anzustellenden kurzen Wiederhohlung des bisher Gesagten desto besser antworten könnt.

L. Wer sagt mir geschwind, welchen gemeinschaftlichen Namen diese Körper alle führen? K. Prismen (prismatische Körper.)

L. Wor-

*) Statt des obigen Ausdrukks werde ich in der Folge immer diesen: No. 17 + 15. gebrauchen.

L. Worin müssen sie als Prismen alle mit einander übereinstimmen? oder: welche Merkmale müssen sie als Prismen alle an sich tragen? K. Sie müssen alle von zwey parallelen, geradlinigen und congruenten Flächen und von eben so vielen Parallelogrammen begrenzt werden, als eine der parallelen Flächen Seiten hat.

L. Wie nennt man denn die zwey parallelen Flächen an jedem dieser Körper? K. Grundflächen.

L. Und wie heißen die Parallelogramme, von denen sie außer den Grundflächen noch begrenzt werden? K. Seitenflächen.

L. Zeiget mir an allen diesen Prismen sowohl die Grund- als die Seitenflächen. K. (zeigen).

L. Hat denn ein Prisma so viel Seitenflächen, als das andere? K. Nein.

L. Welches mag aber wohl die geringste Zahl der Seitenflächen seyn, die ein Prisma haben kann? K. Drey.

L. Warum wohl gerade drey, und nicht noch weniger? K. Da eine geradlinige Figur nicht weniger als drey Seiten haben kann, indem zwey gerade Linien keinen Raum einschließen; so kann ja auch die Grundfläche eines Prisma, die eine geradlinige Figur seyn muß, nicht weniger als drey Seiten, folglich das Prisma selbst nicht weniger als drey Seitenflächen haben.

L. Wie nannten wir denn ein Prisma mit drey Seitenflächen? K. Ein dreyseitiges (dreyeckiges) Prisma.

L. Und

L. Und eins mit vier Seitenflächen? K. Ein vierseitiges.

L. Wie nannten wir aber ein Prisma, dessen Seitenlinien senkrecht auf den Grundflächen stehen? K. Ein senkrechtes oder gerades Prisma.

L. Wenn nennen wir es aber schief? K. Wenn seine Seitenlinien ꝛc.

L. Reicht mir ein Mahl ein schiefes und ein senkrechtes Prisma her. K. (thun dieß.)

L. Was für Figuren müssen denn wohl immer zu Grundflächen eines Prisma dienen? Dreyekke, Vierekke oder andere? K. Jede geradlinige Figur, sie habe so viel Seiten als sie wolle, kann dazu dienen.

L. Giebt es nicht auch Prismen, die noch besondere Namen führen, welche nicht von der Zahl ihrer Seitenflächen hergenommen sind? K. Ja.

L. Nennt mir sie. K. Parallelepipeda.

L. Welches sind denn die wesentlichen Merkmahle eines Parallelepipedums? K. Es muß nothwendig Parallelogramme zu Grundflächen haben.

L. Welche Figuren führen den gemeinschaftlichen Namen Parallelogramme? K. Quadrate, Rechtekke, Rhomben und Rhomboiden.

L. Welche Figuren können also nur zu Grundflächen eines Parallelepipedums dienen? K. Quadrate ꝛc.

L. Jetzt sucht mir ein Parallelepipedum heraus, dessen Grundflächen Quadrate sind. K. (suchen No. 4. heraus.)

L. So!

L. So! Nun sucht eines, dessen Grundflächen Rechtekke sind. K. (suchen No. 6 und 7. heraus.)

L. Auch recht! Wenn wir bey diesem (No. 7.) die Fläche d oder c zu Grundflächen annehmen, so haben wir ein Parallelepipedum, das Rauten (Rhomben) zu Grundflächen hat. Wie heißt denn ein Parallelepipedum, das gerade ist und Rechtekke zu Grundflächen hat? K. Rechtwinkelig.

L. Zeigt mir hier dergleichen Körper. K. (zeigen.)

L. Nun sagt mir, wie ein Parallelepipedum heißt, dessen Grund- und Seitenflächen Quadrate sind. K. Würfel.

L. Wer sucht mir einen Würfel hier heraus? K. (suchen No. 8. B^3 heraus.)

L. Warum rechnet ihr diesen Körper (No. 4.) nicht auch mit zu den Würfeln, da seine Grundflächen doch Quadrate sind? K. Weil seine Seitenflächen nicht auch diese Figur haben.

L. Von wie viel Quadraten wird denn ein Würfel begrenzt? K. Von sechsen.

L. Zählt und zeigt mir zugleich die sechs Quadrate, die diesen Würfel No. 8. B^3 einschließen? K. (thun dieß.)

L. Wie verhalten sich denn diese sechs Quadrate zu einander? K. Sie sind einander gleich.

L. Wie viel Seitenflächen hat denn ein Würfel? K. Vier.

L. Warum gerade vier? K. Weil jede seiner Grundflächen gerade vier Seiten hat, und die Anzahl

zahl der Seitenflächen mit der Anzahl der Seiten der Grundflächen bey einem Prisma übereinstimmen muß.

L. Jetzt sagt mir, ob dieser Körper (No. 5.) auch ein Parallelepipedum genannt werden kann oder nicht. K. Er kann nicht so genannt werden.

L. Warum nicht? K. Weil seine Grundflächen keine Parallelogramme sind.

L. Was für Figuren sind es denn? K. Fünfekke.

L. Wie haben wir denn diesen Körper genannt? K. Fünfseitiges Prisma.

L. Welche von diesen Körpern nannten wir Cylinder? K. Diese da (zeigend.)

L. Was versteht man denn unter einem Cylinder? K. Einen prismatischen Körper, dessen Grundflächen Kreise sind.

L. Aber ich denke, ein Prisma müsse geradlinige Figuren zu Grundflächen haben? K. Man nimmt einen Kreis als eine geradlinige Figur, nur von so viel Seiten an, daß man ihre Anzahl nicht zu bestimmen im Stande ist.

L. Wißt ihr denn auch noch, was man unter der Axe des Cylinders versteht? K. Ja, diejenige gerade Linie, welche ꝛc.

L. Was für ein Unterschied ist denn zwischen diesen beiden (Nr. 15. und 19.) Cylindern. K. Dieser ist gerade oder senkrecht, und dieser schief.

L. Warum nennt ihr diesen gerade? K. Weil ꝛc.

L. Warum heißt aber dieser schief? K. Weil ꝛc.

L. Jetzt

L. Jetzt will ich sehen, ob ihr von dem bisher Gelernten Anwendung machen und Körper durch Hülfe eüres Augenmaaßes darnach beurtheilen und benennen könnt. Vor allem sagt mir, ob ihr keine prismatischen Körper hier in der Stube wahrnehmt. K. Ja, dergleichen nehmen wir wahr.

L. Welche sind es? K. Dieses Tischblatt, diese Bank (ohne Beine betrachtet), unsere schwarze Wandtafel, die Stubenthür (ohne alles Eisenwerk betrachtet) rc.

L. Warum glaubt ihr denn, daß diese Körper unter die prismatischen zu rechnen seyn? K. Weil rc.

L. Zeigt mir doch an jedem derselben die Grund- und Seitenflächen. K. (zeigen.)

L. Aber zu welcher besondern Art der Prismen gehören die von eüch genannten Körper? K. Zu den Parallelepipeden.

L. Warum müssen sie zu diesen Körpern gerechnet werden? K. Weil rc.

L. Kennt ihr sonst keine Körper mehr, die die Merkmahle eines Parallelepipedums an sich tragen? K. (sagen vielleicht:) Bakksteine, Quadersteine, Kisten, die Saülen mancher Hof- oder Gartenthore.

L. Auch ein Haus, von welchem wir das Dach abgehoben denken, der Raum, den die vier Wände nebst der Dekke und dem Fußboden dieses Zimmers begrenzen, eine nach einer geraden Linie fortgeführte Mauer, ein Kartenblatt, die Bretter, die den Fußboden eines Zimmers ausmachen, und noch viele

le andere Dinge haben die Gestalt eines Parallelepipedums. — Jetzt sagt, ob ihr im gemeinen Leben noch keine Körper in cylindrischer Gestalt wahrgenommen habt. K. Ey ja! Nudelhölzer, die Wellen der Mühlenräder, Bleystifte ohne Spitzen, manche Tobakksdosen ꝛc. haben diese Gestalt.

L. Gut! Dreyseitige Prismen habt ihr aber wohl noch nicht gesehen? K. Nein.

L. Die Dächer vieler Häuser und Scheuern, wenn wir sie sammt dem Boden von den vier Wänden, worauf sie ruhen, getrennt denken, haben diese Gestalt. Außerdem kommen im gemeinen Leben wenig Körper in derselben vor.

L. (, welcher No. 11. vorgelegt hat.) Jetzt sagt mir doch, was dieses da für Körper sind. K. Das sind lauter dreyseitige Prismen.

L. Mit diesen Prismen und diesen Würfeln (No. 10.) hier will ich nun verschiedene Körperfiguren bilden und sehen, ob ihr mir sie gleich nennen könnt: Nachdem auf die Fläche ABCD. Fig. 14. Tab. II. zwey Stükke von No. 11. so gesetzt worden sind, daß beyder Grundflächen zusammen gedachte Figur (Fig. 14.) bilden und also dekken. Was ist denn wohl jetzt dieß für eine Körperfigur? — Es versteht sich, daß ihr euch jetzt, so wie in der Folge, immer die kleinen Würfel und Prismen, die ich so zusammen stelle, vereinigt (als einen Körper) denkt. K. Das scheint ein Würfel zu seyn.

L. Und ist wirklich einer, denn alle diese Dreyseitigen Prismen (No. 11.) sind so beschaffen, daß je

je zwey und zwey, so wie diese (Fig. 14.) an einander gelegt, einen Würfel bilden. Aber was ist dieses (die vorliegenden 2 Stükke von No. 11. so an einander legend, daß ihre Grundflächen die Fläche A B C D. Fig. 15. dekken) für eine Körperfigur? K. Das ist ein Parallelepipedum.

L. Aus welchem Grunde behauptet ihr dieses? K. Weil dieser Körper ein Prisma ist, das Parallelogramme zu Grundflächen hat.

L. Und was für eine Art von Parallelogrammen sind seine Grundflächen? K. Längliche Rauten (Rhomboiden).

L. (Beyde auf Fig. 15. stehende Körper auf einander setzend, so daß sie ein dreyseitiges Prisma bilden.) Was haben wir aber jetzt für einen Körper vor uns? K. Ein dreyseitiges Prisma.

L. Und jetzt (beyde Stükke so an einander legend, daß ihre Grundflächen Fig. 16. bilden.) K. Abermahls ein dreyseitiges Prisma.

L. Und was führt dieser Körper (ein Stück von No. 10. und die zwey vorliegenden von No. 11. auf die Fläche A B C. Fig. 17. gehörig setzend) für einen Namen? K. Auch den Namen dreyseitiges Prisma.

L. (, welcher mit einem Stükke von No. 10. und mit 3 Stükken von No. 11. ein fünfseitiges Prisma auf der Grundfläche A B C D E Fig. 18. errichtet hat.) Aber könnt ihr mir wohl sagen, was dieses für ein Körper ist? K. — L. Wie? Ihr stutzt? Sagt mir doch geschwind, welche Merkmahle

mahle ein Körper haben muß, wenn er ein Prisma seyn soll. K. Er muß zwey parallele, geradlinige und congruente Figuren zu Grundflächen rc.

L. Befinden sich denn, dem Anscheine nach, diese Merkmahle nicht an dem vorliegenden Körper? K. Ey ja.

L. Was muß ihm also für eine Benennung zukommen? K. Die Benennung Prisma?

L. Freylich! Aber wie viel Seiten hat dieses Prisma? K. Fünf.

L. Und ist es gerade oder schief? K. Gerade.

L. (, der an die vorige Körperfigur noch 3 Stükke von No. 11. gesetzt und dadurch auf der Grundfläche A B C D. Fig. 19. ein Parallelepipedum errichtet hat.) Kann diese Körperfigur wohl auch Prisma heißen? K. Allerdings.

L. Warum denn? K. Weil rc.

L. Aber welche Art von Prismen ist es? K. Ein Parallelepipedum.

L. Warum muß es diesen Namen führen? K. Weil seine Grundflächen Parallelogramme sind.

L. (, welcher auf der Grundfläche ABCDEF. Fig. 20. mit 4 Stükken von No. 10. und mit 8 Stükken von No. 11. ein zwey Zoll hohes sechsseitiges Prisma gebildet hat.) Könnt ihr mir denn wohl auch sagen, was dieses für ein Körper ist? K. Das ist ein gerades Prisma.

L. Setzt noch die Benennung hinzu, die die Anzahl seiner Seitenflächen anzeigt. K. Ein sechsseitiges (sechsekkiges) gerades Prisma.

L. (, wel-

L. (, welcher mit 10 Stükken von No. 10. und mit 6 Stükken von No. 11. auf der Grundfläche A B C D E F G H. Fig. 21. ein zwey Zoll hohes achtseitiges Prisma errichtet hat.) Wer sagt mir wohl geschwind, was dieses für ein Körper ist? K. Das ist ein achtseitiges gerades Prisma.

L. Könnte es denn kein Cylinder seyn? K. Nein.

L. Warum nicht? K. Weil seine Grundflächen keine Kreise sind.

L. Das ist wahr. Aber schon nähert sich diese Körperfigur in etwas dem Cylinder, und sie würde sich ihm desto mehr nähern, je mehr wir die Zahl der Seiten ihrer Grundflächen vermehrten, insbesondere, wenn diese reguläre Figuren wären, welches hier der Fall nicht ist. (Nachdem auf der Grundfläche A B C D. Fig. 22. T. III. ein zwey Zoll hohes Parallelepipedum errichtet worden ist.) Was habe ich denn jetzt für einen Körper gebildet? K. Ein Parallelepipedum.

L. Ich denke es ist ein Prisma? K. Freylich wohl; aber eine besondere Art von Prismen, die eben Parallelepipedum heißt.

L. Gut! Ihr könnt euch unter diesem Körper jetzt eine kleine Mauer oder eine Kiste vorstellen, und euch dadurch überzeugen, daß wir die genannten Dinge mit Recht Parallelepipeda nennen. Wer sagt mir denn auch, was dieses (auf das auf der Grundfläche I H K D. Fig. 24. errichtete, 2 Zoll hohe, Parallelepipedum zeigend) für ein Kör-

per ist? K. Das ist auch ein Parallelepipedum, dessen Grundflächen längliche Rauten sind.

L. Ganz recht! Ich sehe nun, daß ihr vorgelegte prismatische Körper zu erkennen und zu benennen im Stande seyd. Von nun an müßt ihr alle Körper, die euch vorkommen, schon mit mehr Aufmerksamkeit betrachten und sehen, ob sich ihre Gestalt nicht etwa überhaupt der prismatischen, oder insbesondere der parallelepipedischen oder würflichten nähere.

Vierter Satz.

Erklärung.

L. Hier bey diesem Körper (No. 4.) ist die Linie m n eine senkrechte Linie, die von der einen Grundfläche zu der gegenüberstehenden gezogen ist. Gesetzt, diese Linie mäße gerade 2 Zoll, wie hoch würde alsdann dieses Prisma seyn? K. Zwey Zoll.

L. Ihr merkt also, daß die erstbeschriebene Linie m n die Höhe dieses Prismas anzeigt. Könnt ihr mir nun nicht sagen, was man wohl überhaupt unter der Höhe eines prismatischen Körpers versteht? K. Diejenige senkrechte Linie, die man von der einen Grundfläche eines solchen Körpers zu der gegenüberstehenden ziehen kann.

L. Gut! da bey senkrechten Prismen die Seiten-Linien und bey senkrechten Cylindern die Axen senk-

senkrecht auf den beyden Grundflächen stehen, so zeigen diese Linien auch die Höhen der genannten Körper an. Dieß ist aber nicht der Fall bey einem schiefen Prisma. Hier z. B. (No. 7. auf b stehend) dürften wir nur die Linien o p, nicht aber eine der Seitenlinien messen, wenn wir die Höhe dieses Prismas erfahren wollten; denn nur o p ist eine von einer Grundfläche zur andern gezogene senkrechte Linie. — Hier ist unser Maßstab (No. 2.) nehmt ihn und meßt damit die Höhe eines jeden dieser prismatischen Körper. K. (messen bey allen vorliegenden geraden Prismen eine der Seitenlinien (Seitenkanten), bey Nro. 7. aber die Linie o p.)

L. Nun wißt ihr, wie man die Höhe eines prismatischen Körpers erforschen kann. Nur merkt hiebey, daß man bey einem geraden Cylinder auch nur die Seite desselben, d. h. diejenige gerade Linie, welche man auf seiner Oberfläche parallel mit der Axe ziehen kann, und welche zwey Punkte der Grundflächen mit einander verbindet, messen darf, um seine Höhe zu erfahren. Bey diesem Cylinder (No. 13.) z. B. ist die Linie p q die Seite desselben. Dieses schiefen Cylinders (No. 19.) Höhe aber erfahren wir, wenn wir von einem Punkte der Peripherie der einen Grundfläche ein Loth auf die erweiterte gegen überstehende Grundfläche fällen, welches wir am bequemsten durch ein Senkbley also bewerkstelligen können:

Man messe hier die Höhe dieses Cylinders durch Hülfe eines Senkbleyes, wie Fig. 7. Tab. I. zeigt, und sage dabey, daß die Fläche des Tisches, worauf dieser Cy-

 linder

linder stehet, als seine erweiterte Grundfläche betrachtet wird.

L. Die euch bisher vorgelegten Körper haben wir zwar als vollkommene Prismen angenommen; allein sie sind es nicht. Denn kein Künstler kann dergleichen Körper mit der Vollkommenheit verfertigen, daß gar kein Fehler daran und z. B. die eine Grundfläche nicht etwa um $\frac{1}{1000}$ einer Quadratlinie größer wäre, als die andre. Vollkommene Prismen können wir uns nur denken, sie nur in Gedanken entstehen lassen. Wenn wir uns nämlich vorstellen, daß sich irgend eine ebene, von geraden Linien begrenzte, Fläche an einer geraden Linie so herabbewege, daß sie sich immer parallel *) bleibt, und uns dann den Raum, den diese Fläche durchlaufen hat, denken (vorstellen); so haben wir eine Vorstellung von einem Prisma. Wenn z. B. dieses (irgend einen Stift oder ein kleines Stökkchen senkrecht auf den Tisch setzend) eine gerade Linie, und dieses Dreyekk (von No. 45.) eine

*) Man bewege hier No. 1. mit sich selbst parallel auf und ab, und sage dabey: jetzt bewegt sich diese Fläche mit sich selbst parallel auf und ab. Hierauf bewege man die nämliche Fläche so auf und ab, daß sie nie mit ihrer vorhergehenden Lage parallel ist und sage: jetzt bleibt diese Fläche in ihrer Bewegung nicht mit sich selbst parallel. Diese Anschauung wird den Kindern die Sache deutlicher machen, als die Erklärung: eine Fläche bewegt sich mit sich selbst parallrl, wenn sie mit ihrer ersten Lage immer parallel bleibt.

eine bloße Fläche wäre, und sich dann so (das Dreyekk an der angenommenen geraden Linie mit sich selbst parallel hinabführend) an dieser Linie herabbewegte; so würde der Raum, den es (das Dreyekk) nach und nach durchlauft, ein dreyseitiges Prisma seyn. Und wenn sich dieser Kreis (No. 41. b.) eben so an dieser geraden Linie immer mit sich selbst parallel herabbewegte, (den Kreis, wie vorhin das Dreyekk, an der angenommenen Linie herabführend); so wäre der von ihm durchlaufene Raum — was meynt ihr wohl? K. Ein Cylinder.

L. Richtig! Und was entstünde, wenn sich dieses Parallelogramm (No. 1.) ebenfalls so (zeigend) herabbewegte? K. Ein Parallelepipedum.

L. Gut! Nunmehr könnt ihr mir vielleicht sagen, wie wir in Gedanken ein sechsekkiges Prisma können entstehen lassen. Wer sagt mir dieß? K. Wenn wir uns vorstellen, daß sich ein Sechsekk an einer geraden Linie mit sich selbst parallel herabbewege.

L. Hier habe ich ein Sechsekk; führt es ein Mahl an dieser (angenommenen) geraden Linie mit sich selbst parallel herab. K. (thun dieß. Wankt das Sechsekk dabey hinüber und herüber, so sage man ihnen, daß es, wenn es so wankt, in seiner Bewegung nicht mit sich selbst parallel bleibe, also kein Prisma durch dessen Bewegung entstehe.)

L. Was ist denn nun der Raum, den dieses Sechsekk jetzt durchlaufen hat, für eine Körperfigur? K. Ein sechsekkiges Prisma.

L. Ist

L. Ist dieses Prisma wirklich vor uns, oder denken wir uns dasselbe nur? K. Wir denken es uns nur.

L. Ihr wißt also jetzt, daß vollkommene Prismen nur in unserm Verstande vorhanden sind, und daß diejenigen Körper, die wir im gemeinen Leben Prismen nennen, sich nur mehr oder weniger der prismatischen Gestalt nähern. Der Kürze gen, sprechen wir aber gleichwohl: Dieser oder jener Körper ist ein Prisma.

Fünfter Satz.

Lehrsatz.

L. (, welcher zwey Stükke von No. 10. so aufeinander gestellt hat, daß sie ein zwey Zoll hohes Parallelepipedum bilden.) Denkt, diese zwey auf einander stehenden Körper wären miteinander vereinigt, und sagt, welchen Namen diese Körperfigur führen muß. K. Den Namen Parallelepipedum.

L. Also auch den Namen Prisma. Könntet ihr wohl dieses Prisma — ich will es A nennen — vergrößern, aber so, daß es immer noch ein Prisma bleibt? K. O ja.

L. Wie denn? K. Wir dürften ja nur noch so einen Würfel *) oben darauf setzen.

L. Thut

*) Hier müssen die Stükke No. 10. den Kindern vor Augen liegen.

L. Thut dieß. K. (thun es).

L. Was habt ihr jetzt mit dem Prisma A für eine Veränderung vorgenommen? K. Wir haben es vergrößert. —

L. Was ist dadurch zugleich vergrößert worden, seine Höhe oder seine Grundfläche? K. Seine Höhe.

K. Gut! Könntet ihr aber dieses Prisma A (den aufgesetzten dritten Würfel wieder wegnehmend) nicht auch vergrößern, ohne daß es höher würde, aber doch die prismatische Gestalt behielte? K. Ja.

L. Wie denn? K. Wenn wir noch zwey so aufeinander gestellte Würfel neben ansetzten.

L. Thut dieß ein Mahl. K. (setzen noch zwey auf einander gestellte Würfel neben an, und bilden so ein zwey Zoll breites und zwey Zoll hohes Parallelepipedum, gleich dem mit No. 6. bezeichneten.)

L. Jetzt habt ihr allerdings auch unser voriges Prisma vergrößert. Hat aber durch diese Vergrößerung seine Höhe oder seine Grundfläche einen Zuwachs erhalten? K. Seine Grundfläche.

L. Könntet ihr denn aber dieses Prisma A. (die zwey von den Schülern erst angesetzten Würfel wieder wegrükkend) nicht so vergrößern, daß dabey sowohl die Höhe als die Grundfläche einen Zuwachs erhielte? K. Ja.

L. Vergrößert es ein Mahl auf diese Weise, doch aber so, daß es immer die prismatische Gestalt behalte. K. (setzen einen Würfel oben auf, und

und drey über einander stehende neben an, so daß ein Prisma von drey Zoll Höhe und zwey Zoll Breite entsteht.)

L. Jetzt sagt, ob ihr wohl die Seitenflächen des Prismas A. vergrößern könntet, ohne seine Höhe oder Grundfläche zugleich mit zu vergrößern. K. Nein, das könnten wir nicht.

L. Freylich nicht. Die Seitenflächen können nur größer werden, wenn wir noch einen Würfel da oben drauf setzen, also der Höhe einen Zuwachs geben, oder noch etwas an die Seite setzen, also die Grundfläche erweitern. — Seht ihrs (die hier nöthige Anschauung veranstaltend, indem das Prisma A, wie vorhin, vergrößert wird)? Jetzt werdet ihr mir sagen können, ob ich wohl dieß Prisma (dergleichen Körper aus vier Würfeln, wovon je zwey und zwey auf einander stehen, bildend,) das aber immer ein Prisma bleiben soll, verkleinern könnte, ohne zugleich seine Höhe oder Grundfläche oder beydes zugleich zu verringern. K. Das können Sie nicht.

L. Ihr habt Recht. Ich kann es nur so (die zwey obern Würfel wegnehmend), oder so (die zwey links oder rechts stehenden Würfel wegnehmend), oder so (drey Würfel wegnehmend,) verkleinern. Im ersten Falle wird aber die Höhe, im zweyten die Grundfläche, im dritten beydes mit vermindert. Jetzt sagt mir, was mit einem Prisma für eine Veränderung vorgeht, wenn ich entweder seine Höhe, oder seine Grundfläche, oder beydes vergrößere, übrigens dem Körper seine prismatische Gestalt lasse?

se? Wird es dadurch größer oder kleiner? K. Es wird dadurch größer.

L. Und was geht für eine Veränderung damit vor, wenn ich seine Höhe, oder Grundfläche, oder beides zugleich vermindere? K. Dadurch wird es kleiner.

L. Da ihr dieses wißt, so könnt ihr mir sagen, wovon eigentlich die Größe eines Prismas abhängt, oder, wie man gewöhnlich spricht, wodurch die Größe eines Prismas bestimmt wird. K. Durch seine Grundfläche und Höhe.

L. Richtig! Wenn mir nun jemand sagte, daß ich ihm ein Prisma etwa aus Wachs verfertigen sollte, dessen Grundfläche sechs Quadratzoll, und dessen Höhe einen Schuh betrüge, hienge es da noch von meiner Willkühr ab, wie groß ich das Prisma machen, d. h. wie viel Wachs ich dazu nehmen wollte? K. Nein.

L. Freylich nicht. Durch die gegebene Höhe und Grundfläche wäre mir die Größe des Prismas vollkommen bestimmt, so daß ich kein noch so kleines Stükkchen Wachs mehr oder weniger dazu nehmen dürfte, als die Angabe der Höhe und Grundfläche nothwendig erforderte. Gesetzt nun, ich hätte zwey prismatische Körper vor mir, die beyde gleiche Grundflächen und Höhen hätten, wie würden sich wohl diese zwey Körper, eürer Meynung nach, zu einander verhalten müssen? K. Diese müßten einander gleich seyn.

L. Eüre Behauptung ist richtig, nur wünsche ich noch den Grund derselben zu vernehmen. K. Weil

Weil die Größe eines Prismas von seiner Grundfläche und Höhe bestimmt wird, so müssen ja gleiche Grundflächen und Höhen, auch gleiche Größe bewirken.

L. Recht! Nun drückt mir das, was ihr jetzt von Prismen mit gleichen Grundflächen und Höhen gelernt habt, in einem zusammenhängenden Satze aus. K. Alle prismatische Körper, welche gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind einander gleich.

L. Von der Wahrheit dieses Satzes sollt ihr euch nun jetzt auch durch verschiedene sinnliche Wahrnehmungen überzeugen. Hier (zwey Stükke von No. 11. vorlegend) habe ich zwey Körper, die, wenn ich sie so (wie Fig. 14. zeigt) zusammenlege, ein Prisma bilden, welches einen Zoll hoch ist, und das wir A. nennen wollen. Lege ich sie aber so, (beyde dreyekkige Körper so zusammenlegend, daß ein dreyseitiges Prisma daraus entsteht, dessen Grundfläche Fig. 16. ist) zusammen, so bilden sie ein dreyseitiges Prisma, welches wir B nennen wollen. Nun sagt, ob die Grundfläche des Prismas B größer oder kleiner ist, als die Grundfläche des Prismas A. K. Sie ist weder größer noch kleiner.

L. Warum glaubt ihr dieses? K. Weil ja beyde Prismen einen und den nämlichen Flächenraum zu Grundflächen haben, indem Sie aus dem Quadrate, der Grundfläche des Prismas A, nur ein Dreyekk, die Grundfläche des Prismas B, bildeten.

L. Das ist richtig. Beyde Prismen haben zwar verschiedene, aber doch gleiche Figuren zu

Grund-

Grundflächen. Wie steht es aber mit der Höhe dieser beyden Prismen? Welches von beyden ist das höhere. K. Es ist ja eins so hoch, als das andere, indem diese Stückchen Holz einerley Höhe behalten, Sie mögen nun das Prisma A, oder das Prisma B damit bilden.

L. Beyde Prismen haben also gleiche —? K. Grundflächen und Höhen.

L. Wie müssen sie sich demnach zu einander verhalten. K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Und daß dem wirklich so ist, lehrt ja der Augenschein. Denn wenn ich diese zwey Stückchen Holz so (einen Würfel damit bildend) aneinander halte, so habe ich ja kein Spänchen mehr oder weniger, als wenn ich sie so (ein dreyseitiges Prisma bildend) an einander halte. Ihr habt also hier wirklich einen Fall, wo Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen auch gleiche Größe haben. — (Nachdem auf der Grundfläche A B C Fig. 17. ein Prisma von zwey Zoll Höhe, und auf der Grundfläche A e f g Fig. 22. ein anderes von der nämlichen Höhe gebildet worden.) Hier habe ich wieder zwey Prismen, deren Grundflächen und Höhen ihr mir leicht werdet angeben können, wenn ihr bedenkt, was ich jetzt ein für alle Mahl erinnere, daß jede Fläche dieser Würfel (No. 10.) gerade einen ganzen, und jede Grundfläche dieser dreyseitigen Prismen (No. 11.) einen halben Quadratzoll ausmacht, und daß sowohl jeder dieser Würfel (No. 10.), als jedes dieser Prismen (No. 11.) einen Zoll hoch ist. Wie viel muß demnach die

Grund-

Grundfläche dieses vierseitigen (auf A e f g Fig. 22. errichteten) Prismas betragen? K. Zwey Quadratzoll.

L. Und wie hoch ist es? K. Zwey Zoll.

L. Wie groß ist aber eine Grundfläche dieses (auf A C B Fig. 17. errichteten) Prismas? K. Auch zwey Quadratzoll.

L. Und wie viel beträgt seine Höhe? K. Auch zwey Zoll.

L. Worin stimmen also diese beyden Prismen mit einander überein? K. In ihren Grundflächen und Höhen.

L. Und was muß nach unserm vorhin aufgestellten Satze daraus folgen? K. Daß beyde Körper einander gleich seyn müssen.

L. Das sind sie auch; denn ich kann sowohl aus dem einen, als aus dem andern 4, also aus beyden 8, Würfel machen, die alle einander gleich sind. Auch kann ich dieses dreyseitige (auf Fig. 17. errichtete) Prisma in ein solches vierekkiges (auf das vorliegende zeigend) verwandeln. — Seht, nun habe ich es so verwandelt, und es ist jetzt von diesem andern nicht zu unterscheiden. (Nachdem sowohl auf I H K D. Fig. 24. als auf A B C D E F. Fig. 20. ein zwey Zoll hohes Prisma errichtet worden.) Forscht nach und sagt mir dann, wie groß eine Grundfläche eines jeden dieser Prismen ist. K. Vier Quadratzoll.

L. Und wie hoch ist jedes. K. Zwey Zoll.

L. Al-

L. Also müssen beyde Körper wieder einander gleich seyn. Seht ob dem so ist und sagt, ob der eine so viel von unsern gleichen Würfeln enthält, als der andere. K. (nach der Untersuchung) Ja es ist dem wirklich so; denn es enthält jeder 8 solche Würfel. —

L. Daß diese zwey hohlen Prismen (No. 13. und 14.) einerley Höhe haben, seht ihr gleich, wenn ihr sie neben einander stellt. Wie sich aber ihre Grundflächen zu einander verhalten, das wollen wir erst erforschen. Das eine hat Quadrate, das andere Dreyekke zu Grundflächen. Beyde Figuren, das Quadrat und das Dreyekk haben einerley Höhe, die letztere aber, (das Dreyekk) hat eine noch ein Mahl so große Grundlinie, als die erstere. Seht ihrs (die nöthige Messung hier anstellend,) was folgt nun aus diesem Umstande? K. Daß beyde Figuren einander gleich seyn müssen.

L. Ihr wißt also jetzt, daß diese zwey Prismen gleiche Höhen und Grundflächen haben. Nun sollt ihr sehen, daß auch hier das eine so groß, als das andere ist.

Jetzt wird das eine dieser Prismen voll klaren Sand (Streusand) gefüllt *), und dieser hierauf in das andere übergeschüttet.

L. Ihr habt jetzt gesehen, daß dieses dreyseitige Prisma eben so viel Sand aufnimmt, als das vier-

*) Ein für allemal erinnere ich, daß wenn ein dergleichen Experiment angestellt wird, man mit der nöthigen Sorgfalt und Accuratesse zu Werke gehe, und z. B. den

vierseitige. Der Raum in dem einen muß also so groß seyn, als der Raum in dem andern, d. h. beyde körperliche Raüme müssen einander gleich seyn. Hier (No. 17. † 15.) habe ich einen Cylinder, dessen Grundfläche 3 Quadratzoll und 14 Quadratlinien beträgt, und dessen Höhe 2 Zoll mißt. Gesetzt dieses fünfseitige Prisma (No. 5.) hätte mit diesem Cylinder gleiche Grundflächen und Höhe, wie würden sich denn beyde Körper zu einander verhalten müssen? K. Sie müßten einander gleich seyn.

L. Diese eüre Antwort ist die Folgerung aus einem gewissen Satze, den ich zu hören wünsche. K. Alle Prismen, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind einander gleich.

L. Aber in diesem Satze ist ja nur von Prismen, und nicht von Cylindern die Rede. K. Ein Cylinder gehört aber unter die Prismen.

L. Freylich! Wenn ich also einen solchen Cylinder, wie dieser da ist, und ein fünfseitiges Prisma, das mit diesem Cylinder gleiche Grundflächen und Höhe hätte, von Wachs gießen wollte, zu welchem dieser beyden Körper brauchte ich dann die größere Menge Wachs? K. Sie brauchten zu dem einen so viel, als zu dem andern.

L. Und warum dieß? K. Weil der eine gerade so groß, als der andere wäre.

L. Wie

den Sand in dem einen Gefäß eben so fest zusammenrüttle, als in dem andern. Denn wenn dieß nicht geschieht, so scheint oft das eine mehr oder weniger Sand zu fassen, als das andere, und der vorgesetzte Zweck wird dann nicht erreicht.

L. Wie aber, wenn ich dem Prisma zwölf Seiten geben, seine Höhe und Grundflächen aber weder größer noch kleiner machen wollte, würde ich dann auch zu dem einen Körper so viel Wachs brauchen, als zu dem andern? K. Freylich.

L. Nun werdet ihr mir sagen können, ob die Zahl der Seitenflächen einen Unterschied in der Größe zweier Prismen bewirkt oder nicht, wenn diese gleiche Grundflächen und Höhen haben. K. Sie bewirkt keinen Unterschied.

L. Freylich nicht. Drey = vier = fünfseitige ꝛc. Prismen und Cylinder müssen unter den angegebenen Bedingungen nothwendig einander gleich seyn, da, wie ihr schon mehrmals gehört habt, die Größe dieser Körper allein durch ihre Grundflächen und Höhen keineswegs aber durch die Zahl ihrer Seitenflächen bestimmt wird.

Sechster Satz.

Erklärung.

L. Betrachtet doch ein Mahl diesen Körper (No. 23. U.) genau, und sagt mir, ob er wohl auch unter die Prismen gerechnet werden kann. K. Nein das kann er nicht.

L. Aber warum denn nicht? K. Weil ꝛc.

L. Ihr habt Recht. Dieser Körper gehört in eine andere Classe der mathematischen Körperfiguren,

deren

deren Merkmale und Nameu ihr jetzt sollt kennen lernen. Vor allen sagt mir, auf welche seiner Flächen ihr diesen Körper stellen wollt, wenn er aufrecht stehen soll. K. Auf diese (zeigend).

L. Wie würdet ihr daher diese Fläche, da der Körper darauf steht (stehen kann), nennen? K. Grundfläche.

L. Recht! Diesen Namen führt diese Fläche auch wirklich. Was für eine Figur ist denn diese Fläche? K. Sie scheint ein Quadrat zu seyn.

L. Und ist es auch. Gehört aber diese Figur unter die gerad- oder krummlinigen? K. Unter die geradlinigen.

L. Diese allgemeine Benennung wollen wir einstweilen beybehalten. Dieser Körper hat also eine geradlinige Figur zur Grundfläche. Hat er denn nicht auch Seitenflächen? K. Ja wohl.

L. Zeigt mir sie. K. (zeigend).

L. Was für Figuren sind denn diese Flächen? K. Dreyekke.

L. Und wie viel Dreyekke hat dieser Körper zu Seitenflächen? K. Vier.

L. Hat er da mehr oder weniger Dreyekke zu Seitenflächen, als seine Grundfläche Seiten hat? K. Er hat deren nicht mehr und nicht weniger, sondern gerade so viel.

L. Sagt mir geschwind noch ein Mahl, was ihr jetzt von diesem Körper behauptet. K. Wir behaupten, daß er gerade so viel Dreyekke zu Seitenflächen habe, als seine Grundfläche Seiten hat.

L. Ist

L. Ist nicht auch ein Punkt vorhanden, wo alle diese, die Seitenfläche ausmachenden, Dreyekke zusammen stoßen? K. Ey ja! hier (zeigend) ist ein solcher Punkt.

L. Liegt dieser Punkt in der Grundfläche, oder außer derselben? K. Außer derselben.

L. Jetzt haben wir an diesem Körper die wesentlichen Merkmale einer Pyramide aufgefunden. So nennt man nämlich einen Körper, an welchem sich die jetzt angegebenen Merkmale zusammen befinden, und wer diese gemerkt hat, der wird mir sagen können, was eine Pyramide ist. Wer sagt mir dieß? K. Eine Pyramide ist ein Körper, der eine geradlinige Figur zur Grundfläche, und eben so viel in einem, außer der Grundfläche liegenden, Punkte zusammen stoßende Dreyekke zu Seitenflächen hat, als sich Seiten an der Grundfläche vorfinden.

L. Nun betrachtet ein Mahl diesen Körper (No. 24. vorlegend) und sagt, ob sich die Merkmale einer Pyramide an ihm befinden oder nicht. K. Sie befinden sich an ihm.

L. Da muß er also erstens eine geradlinige Figur zur Grundfläche haben: zeigt mir diese. K: (zeigen die Grundfläche).

L. Was für eine Figur ist diese Fläche? K: Ein Fünfekk.

L. Da muß auch zweytens dieser Körper fünf Dreyekke zu Seitenflächen haben: zählt und zeigt mir diese. K. (thun dieses).

L. Drittens müssen diese fünf Dreyekke in einem außer der Grundfläche liegenden Punkte zusammen stoßen; zeigt mir auch diesen Punkt. K. (zeigen).

L. Dieser Körper (No. 24.) stimmt wirklich in seinen wesentlichen Merkmalen mit diesen da (No. 23.) überein, und heißt deswegen mit Recht —? K. Pyramide.

L. Nun sagt mir doch, ob dieser Körper (No. 23. X. vorlegend) nicht auch eine Pyramide ist? K. Nein, das ist keine.

L. Warum kann dieß keine Pyramide seyn? K. Weil seine Seitenflächen keine Dreyekke sind.

L. Richtig! Aber da ist dieß (No. 20. vorlegend) wohl auch keine Pyramide? K. Ja doch!

L. Warum glaubt ihr, diesen Körper eine Pyramide nennen zu dürfen? K. Weil er hat 1) eine geradlinige Figur zur Grundfläche, 2) so viel Triangel zu Seitenflächen, als die Grundfläche Seiten hat, und weil 3) diese Triangel in einem, außer der Grundfläche liegenden, Punkte zusammenstoßen.

L. Gut! Jetzt sagt mir, ob ich Recht habe oder nicht, wenn ich diesen Körper (No. 29. B.) auch eine Pyramide nenne. K. Nein, da haben Sie nicht Recht.

L. Und warum nicht? K. (sagen hier ihre Meynung).

L. Wir wollen doch ein Mahl diesen Körper etwas genauer prüfen und sehen, ob ich mich wirklich irre, wenn ich ihn zu den Pyramiden rechne.

Zu einem solchen Körper gehört erstlich—? K. Eine geradlinige Figur als Grundfläche.

L. Gesetzt, ich stelle diesen Körper auf die Fläche c, so steht er aufrecht, und ich kann diese Fläche wirklich seine Grundfläche nennen. Ist dieß nun eine geradlinige Figur oder nicht? K. Es ist eine.

L. Hat denn dieser jetzt auf der Fläche c ruhende Körper keine Seitenflächen? K. Ja.

L. Zeigt sie mir. K. (zeigen die Flächen B C und D.)

L. Was für Figuren sind denn diese Seitenflächen? K. Dreyekke.

L. Und sind deren mehr oder weniger, als die Grundfläche Seiten hat? K. Es sind deren gerade so viel, als die Grundfläche ꝛc.

L. Und ist kein außer der Grundfläche liegender Punkt vorhanden, wo die drey Dreyekke, welche die Seitenflächen ausmachen, mit ihren Spitzen zusammenstoßen? K. Ey ja! hier (den Punkt o. zeigend) ist ein solcher.

L. Meynt ihr nun noch, daß ich mit Unrecht diesen Körper unter die Pyramiden rechne? K. Nein.

L. Was für einen Namen muß er vielmehr auch führen? K. Pyramide.

L. Und warum? K. Weil ꝛc.

L. Allerdings! Freylich scheint es jedem beym ersten Anblikke, als wäre dieß keine Pyramide. Allein bey genaurer Untersuchung finden wir, daß der Schein hier trügt. Jetzt sagt mir noch, wie ihr al-

le Körper da (No. 9. 20. 23. U. 24. 29. a. A. 29. B. auf ihre Grundflächen hinstellend) nennen wollet. K. Pyramiden.

L. Und warum wollt ihr ihnen diese Benennung geben. K. Weil ꝛc.

L. Wie viel Pyramiden haben wir jetzt hier vor uns. K. Sechs.

L. Zeigt mir bei einer jeden den Punkt, wo alle Triangel, welche die Seitenflächen ausmachen, zusammenstoßen. K. (zeigen).

L. Merkt wohl! Jetzt habt ihr mir die Spitze oder den Gipfel einer jeden dieser Pyramiden gezeigt. Könnt ihr mir wohl auch jetzt sagen, was man unter der Spitze einer Pyramide versteht? K. Ja.

L. Was denn? K. Den außer der Grundfläche liegenden Punkt, wo alle, die Seitenflächen ausmachenden, Triangel zusammenstoßen.

L. Gut! Nun merkt dieß noch: die senkrechte Linie, die sich von der Spitze einer Pyramide auf ihre Grundfläche oder auf die Erweiterung derselben ziehen läßt, heißt die Höhe der Pyramide. Hier z. B. (No. 29. A.) zeigt die Seitenlinie (Kante) gm, weil sie sich von der Spitze bis auf die Grundfläche erstreckt, und auf der letztern senkrecht steht, die Höhe dieser Pyramide an. Wenn daher jemand, um die Höhe dieser Pyramide zu erfahren, die Linie (Kante) xy mäße, so würde er seine Absicht nicht erreichen, sondern ein un-

unrichtiges Maß finden: Warum wohl? K. Weil diese Linie nicht senkrecht auf der Grundfläche steht.

L. Freylich! Welche Linie mag wohl hier (No. 9. a.) die Höhe anzeigen? K. Diese (die Linie o p zeigend).

L. Warum zeigt ihr gerade diese und keine der übrigen Seitenlinien? K. Weil nur diese und keine andere senkrecht auf der Grundfläche steht.

L. Aber welche Seitenlinie mag bei dieser Pyramide (No. 25.) die Höhe anzeigen? K. Gar keine.

L. Warum nicht? K. Weil keine davon senkrecht auf der Grundfläche steht.

L. Ihr habt Recht. Hier würde die, durch diesen, in Ruhe gedachten und dann senkrecht herabhängenden Faden, vorgestellte Linie die Höhe anzeigen.

> Man hebe hier No. 25. vor den Augen der Kinder in die Höhe, damit sie von unten hinauf das kleine darin hinabhängende Senkblei (Loth) das jeder leicht anbringen kann, sehen können.

Diese Linie, welche der jetzt von euch wahrgenommene Faden im Bilde darstellt, fällt von dem Gipfel der Pyramide senkrecht auf die Grundfläche, die eine reguläre Figur ist, und trifft sie gerade im Mittelpunkte, und deßwegen heißt diese Pyramide eine gerade (geradstehende). Diese Benennung kommt auch dieser Pyramide (No. 20. u. 21. so zusammen gelegt vorhaltend, daß beyder Grundflächen ein Quadrat bilden,) zu, weil auch

bey

bey ihr eine senkrechte Linie vom Gipfel auf den Mittelpunkt der Grundfläche gezogen werden kann. Seht, diese Linie da (an beyden von einander genommenen Stükken die Linie m n zeigend) steht ganz senkrecht auf dem Mittelpunkte der Grundfläche und erstreckt sich bis an den Gipfel. Ganz anders ist der Fall bey dieser Pyramide (No. 9. a.); denn hier kann nur von einer Spitze (Ekke), aber nicht vom Mittelpunkte der Grundfläche, der hier mit c bemerkt ist, eine senkrechte Linie nach dem Gipfel gezogen werden. Daher heißt auch diese Pyramide (No. 9. a.) nicht gerade sondern schief. Auch dieses (No. 22. und 29. c.) sind schiefe Pyramiden. Wißt ihr wohl jetzt, warum man sie so nennen muß? K. Weil ꝛc.

L. Was mag aber dieses (No. 24.) für eine Pyramide seyn? K. Es scheint eine gerade zu seyn.

L. Warum haltet ihr sie für gerade? K. Weil es scheint, daß eine vom Gipfel auf die Grundfläche senkrecht gezogene Linie gerade den Mittelpunkt dieser Fläche treffen würde.

L. Allerdings würde dieß der Fall seyn, und mit Recht nennt ihr deßhalb auch diese Pyramide gerade. — Nun sagt mir doch, ob diese Pyramiden alle gleich viel Seitenflächen haben oder nicht? K. Nein, sie haben deren nicht alle gleich viel.

L. Welche von ihnen hat wohl die geringste Anzahl von Seitenflächen? K. Diese (No. 20. zeigend).

L. Wie viel Seitenflächen hat denn diese Pyramide? K. Drey.

L. Wie

L. Wie könnten wir sie deßhalb nennen? K. Dreyseitig.

L. So nennt man sie auch wirklich. Sagt, ob nicht noch mehr dreyseitige Pyramiden hier stehen. K. O ja, hier (zeigend) sind ihrer noch drey.

L. Wie wird man wohl diese hier (No. 23. U. und No. 9. a.) nennen, um die Zahl ihrer Seitenflächen anzuzeigen? K. Vierseitige Pyramiden.

L. Und diese da (No. 24.) K. Fünfseitig.

L. Gut! Ihr seht nun, daß die Pyramiden eben so, wie die Prismen, nach der Anzahl ihrer Seitenflächen benannt werden. Nun legt doch einmal diese dreyseitige Pyramide (No. 29. C.) auf die Fläche d — So! können wir wohl jetzt, da wir die Fläche d. als Grundfläche annehmen, diesen Körper auch noch als eine Pyramide betrachten? K. Ja wohl.

L. Nun legt ihn noch auf die Fläche E. und dann auf die Fläche e. und seht, ob sich immer die Merkmale einer Pyramide an ihm befinden und also immer die Seitenflächen Dreyekke sind. K. Ja, dem ist so.

L. Jetzt sagt, ob man bey einer dreyseitigen Pyramide nur eine, oder jede ihrer Flächen als Grundfläche annehmen kann. K. Man kann jede dafür annehmen.

L. Richtig! Seht, ob dieß bei diesen vierseitigen Pyramiden (No. 9. und 23. U.) auch der Fall ist. K. (nach der Untersuchung) Nein, hier ist dieses der Fall nicht.

L. Hier

L. Hier kann er auch nicht Statt finden. Denn wenn wir z. B. die Fläche d (bey No. 9. a.) zur Grundfläche machten, so würde die Fläche c eine Seitenfläche werden. Da diese aber kein Dreyekk ist, und die Seitenflächen einer Pyramide nothwendig Dreyekke seyn müssen; so fehlte ja diesem Körper eines der wesentlichen Merkmale einer Pyramide. Aber woher mag es kommen, daß wir bey einer dreyseitigen Pyramide jede ihrer Flächen zur Grundfläche machen können und dabey doch immer eine Pyramide behalten? K. Weil eine solche Pyramide von lauter Dreyekken begrenzt wird; denn in diesem Falle müssen die Seitenflächen immer Dreyekke seyn, welche von ihnen man auch zur Grundfläche annehmen mag.

L. Richtig! Ihr könnt daher diese Körper (No. 29.) legen auf welche ihrer Flächen ihr wollt, so werdet ihr in ihnen immer Pyramiden erblikken.

Siebenter Satz.

Erklärung.

L. Prüft doch ein Mahl diesen Körper (No. 36. vorlegend) und sagt, ob er ein Prisma, oder eine Pyramide oder keines von beyden ist. K. Er ist auch eine Pyramide.

L. Aus welchem Grunde behauptet ihr dieses? K. Weil 2c.

L. Wie

L. Wie viel Seitenflächen hat denn aber diese Pyramide? K. Drey.

L. Also muß sie von lauter Dreyekken begrenzt seyn. Diese Dreyekke seht etwas genauer an, und sagt mir, so viel ihr nach dem Augenmaße urtheilen könnt, ob es gleichseitige oder ungleichseitige Triangel sind. K. Sie scheinen alle gleichseitig zu seyn.

L. Das sind sie wirklich. Jetzt sagt mir, was ihr sowohl von der Grundfläche als von den Seitenflächen dieser Pyramide wißt. K. Die Grundfläche sowohl, als die Seitenflächen sind gleichseitige Dreyekke.

L. Eine Pyramide, woran sich das jetzt von euch angegebene Merkmal befindet, führt den Namen Tetraëdrum. Dieß hier (No. 36.) ist also? K. Ein Tetraëdrum.

L. In welche Classe von Körpern gehört denn ein Tetraëdrum? K. In die Classe der Pyramiden.

L. Wodurch unterscheidet sich aber ein Tetraëdrum von jeder andern Pyramide? K. Dadurch, daß seine Grundfläche und seine Seiten-Flächen gleichseitige Dreyekke sind.

L. Wie viel Pyramiden sind wohl hier auf dem Tische, welche das Merkmal eines Tetraëdrums haben? K. Nur diese einzige (No. 36. zeigend).

Achter Satz.

Erklärung.

L. Da man Körper, welche wie dieser da (No. 30.) gestaltet sind, im gemeinen Leben häufig sieht und nennen hört; so werdet ihr mir sagen können, wie sie heißen. Wer sagt mir dieß? K. Kegel.

L. Ganz recht! Von wie viel Flächen ist denn dieser Kegel begrenzt (eingeschlossen)? K. Von zweien.

L. Welche davon mag wohl mit Recht seine Grundfläche heißen können? K. Diese (zeigend).

L. Was für eine Figur ist denn die Grundfläche dieses Körpers? K. Ein Kreis.

L. Und unter welche Art von Flächen gehört die andre, die diesen Körper begrenzen hilft? unter die krummen oder unter die geraden (ebenen)? K. Unter die krummen.

L. Bemerkt ihr hier nicht auch, wie bey den Pyramiden, einen Punkt außerhalb der Grundfläche, wo diese krumme Fläche, die wir auch hier Seitenfläche nennen, zusammen geht. K. Ja, hier (zeigend) ist ein solcher Punkt.

L. Dieser Punkt heißt auch hier, wie bey den Pyramiden, Gipfel oder Spitze. Und wenn dieser Kegel recht accurat gemacht wäre, so müßte jede gerade Linie, die ich von der Spitze aus nach der Peripherie der Grundfläche zöge, in diese krumme Fläche da, die die Seitenfläche ausmacht, fal-

fallen. Um euch durch Versinnlichung das, was ich eben gesagt habe, deůtlich zu machen, will ich da ganz an die Spitze einen Faden, der wenn ich ihn anspanne, eine gerade Linie vorstellen soll, halten und ihn bis an jeden beliebigen Punkt der Peripherie der Grundfläche führen. — So! dieser Faden müßte, wenn dieser Kegel ganz vollkommen wäre, überall in die krumme Fläche (Seitenfläche) fallen oder diese immer seiner ganzen Länge nach berühren. Nun paßt auf und hört, ob das was ich jetzt sage richtig ist oder nicht. Dieser Kegel (ich nehme aber jetzt an, er sey ganz vollkommen) wird

1) von einem Kreise, Grundfläche genannt, und von einer einzigen krummen Fläche, welche die Seitenfläche heißt, begrenzt; 2) ist die Seitenfläche so beschaffen, daß sie sich in einem über der Grundfläche liegenden Punkte, Gipfel (Spitze) genannt, zusammenzieht, und daß jede vom Gipfel nach dem Umkreise der Grundfläche gezogene gerade Linie ganz in sie (die Seitenfläche) fällt. K. Das ist richtig!

L. Nun so wiederholt diese Beschreibung. K. (wiederholen).

L. Das was ihr jetzt gesagt habt, ist die Beschreibung nicht nur des vorliegenden, sondern eines jeden Kegels. Wenn ihr an einem Körper, die jetzt von diesem da (No. 30.) angegebenen Merkmale antrefft, so könnt ihr überzeügt seyn,

daß

daß es ein Kegel ist. Nun möchte ich aber wissen, ob man einen Kegel unter die Prismen oder unter die Pyramiden zu rechnen habe. K. Unter die Pyramiden.

L. Aber die Pyramiden müssen ja geradlinige Figuren zu Grundflächen haben, und die Grundflächen der Kegel sind Kreise? K. Man nimmt aber die Kreise als Vielekke von einer unbestimmbar großen Anzahl Seiten an.

L. Ihr habt Recht. Daher sagen wir: wenn die Grundfläche einer Pyramide ein reguläres Vielekk von einer unbestimmbar großen Seitenzahl, das heißt ein Kreis ist, so heißt sie Kegel. Ein Kegel ist also im Grunde eben so eine gewisse Art von Pyramiden, wie der Cylinder eine gewisse Art von Prismen ist. Jetzt zeigt mir an diesem Kegel die Spitze und dann den Mittelpunkt der Grundfläche. K. (zeigend).

L. Was für zwei merkwürdige Punkte zeigt ihr mir jetzt? K. Die Spitze nnd den Mittelpunkt der Grundfläche dieses Kegels.

L. Könnt ihr euch diese zwey Punkte nicht durch eine gerade Linie verbunden denken? K. Ja.

L. Nun so könnt ihr euch die Axe dieses Kegels denken. Merkt ihr wohl jetzt, was man unter der Axe eines Kegels versteht? K. Ja; diejenige gerade Linie, welche man von seiner Spitze zum Mittelpunkte der Grundfläche in Gedanken ziehen kann. (Diejenige gerade Linie, welche die Spitze und den Mittelpunkt mit einander verbindet.)

L. Hin-

L. Hingegen diejenige gerade Linie, welche man von der Spitze eines Kegels an irgend einen Punkt in der Peripherie seiner Grundfläche ziehen kann, heißt seine Seite. Hier an diesem Kegel (No. 30) ist der Strich ab ein Bild seiner Seite. Können wir denn wohl diesem Kegel nicht auch eine gewisse Höhe zuschreiben? K. Ja wohl.

L. Aber welche Linie mag die wahre Höhe desselben anzeigen, seine Axe oder seine Seite? K. Wir denken seine Axe.

L. Da irrt ihr euch nicht; denn die Axe steht bey diesem Kegel senkrecht auf der Grundfläche, und die senkrechte Linie, die man von der Spitze eines Kegels auf seine wirkliche oder erweiterte Grundfläche ziehen kann, ist seine wahre Höhe.

Jetzt sagt mir, was euch dieß (No. 32.) für ein Körper zu seyn scheint. K. Auch ein Kegel.

L. Welchen Grund habt ihr zu dieser Behauptung? K. Dieser Körper wird ja auch nur von zwey Flächen begrenzt, nämlich von einem Kreise, welche seine Grundfläche ausmacht, und ꝛc.

L. Aber nehmt ihr zwischen diesen beyden Kegeln (No. 30. und 32.) nicht einen gewissen Unterschied wahr? K. Ey ja wohl! dieser (No. 30.) ist gerade uud dieser (No. 32) schief.

L. Ihr seht also, daß es auch gerade oder senkrechte und schiefe Kegel giebt. Bey welchem Kegel mag wohl die Axe senkrecht und bey welchem schief auf der Grundfläche stehen? K. Bey diesem hier (No. 30.) steht sie senkrecht, und bey diesem (No. 32.) schief darauf.

L. Und

L. Und von diesem Umstande rührt es her, daß der eine dieser Kegel senkrecht, der andere schief ist. Wer sagt mir wohl jetzt, wenn man einen Kegel senkrecht und wenn man ihn schief nennen kann? K. Wenn seine Axe senkrecht auf der Grundfläche steht, so heißt er senkrecht oder gerade, und wenn sie schief darauf steht, nennt man ihn schief?

L. Nun merkt noch, daß man gerade Baumstämme, versteht sich ohne alle Aeste, als gerade Kegel zu betrachten pflegt.

L. Da ich euch gesagt habe, daß kein Künstler ganz vollkommen prismatische Körper verfertigen könne, so werdet ihr leicht vermuthen, daß auch diese Pyramiden nicht ganz fehlerfrey gearbeitet seyn. Vollkommene Pyramiden können wir ebenfalls nur in Gedanken entstehen lassen, dergleichen Körper uns also nur denken. Wie läßt man aber eine Pyramide in Gedanken entstehen? Dieses will ich euch sagen. Erstlich denkt man sich irgend eine geradlinige Figur, z. B. ein Sechs- oder Zwölfekk wie dieses hier (No. 42 vorlegend) als Grundfläche; zweytens nimmt man außerhalb dieser Figur (Grundfläche) einen gewissen Punkt an, z. B. hier den Punkt, wo dieser Knoten zu liegen kommt, wenn ich diese Fäden so in die Höhe ziehe; drittens zieht man — aber wohl gemerkt! alles in Gedanken — von diesem Punkte gerade Linien in die Ek-

ken

ken der angenommenen Grundfläche, welche Linien hier durch diese Fäden versinnlicht dargestellt sind.

Hier hält man No. 42. mit der einen Hand und ergreift mit der andern den Knoten der Fäden und hebt ihn in die Höhe, so daß alle Fäden gehörig angespannt werden.

Hierdurch entstehen nun Dreyekke, welche mit der Grundfläche einen körperlichen Raum einschließen, und den wir Pyramiden nennen. Seht ihr? jede Seite dieses Sechsekks (No. 42.) bildet mit zwey aus dem angenommenen Punkte gezogenen, durch diese Fäden versinnlichten, Linien ein Dreyekk, und alle auf diese Art hier bey dieser Körperfigur (No. 42.) entstandenen Dreyekke machen die Seitenflächen derselben aus. Der mittlere und senkrecht auf der Grundfläche stehende Faden stellt die Linie vor, welche die Höhe dieser Pyramide anzeigt. — Ein gerader Kegel aber wird in Gedanken folgendermassen beschrieben. Man nimmt ein rechtwinkliges Dreyekk, bewegt es, so wie ich es jetzt hier mache (die nöthige Anschauung mit No. 40, verbunden mit No. 44 b. veranstaltend), um einen seiner Katheten, der aber nicht von der Stelle weichen darf, bis es wieder in seine erste Lage kommt. Der Raum, den dieses Dreyekk bey dieser Bewegung durchlauft, ist ein gerader Kegel. Wer das, was ich jetzt von der Entstehungsart der pyramidalischen Körper gesagt habe, verstanden hat, der wird mir angeben können, wie er eine vierseitige Pyramide in Gedanken will entstehen lassen. Wer dieß kann, der thue es. K.

Ich

Ich denke mir erstlich ein Viereck, als Grundfläche, dann nehme ich außerhalb desselben einen Punkt an, und ziehe von diesem in die Ekken der Grundflächen gerade Linien, wodurch ich vier Dreyekke erhalte, welche mit der Grundfläche einen Raum einschließen, den wir eben eine vierseitige Pyramide nennen.

L. Wer sagt mir aber, wie man in Gedanken einen geraden Kegel entstehen läßt? K. Man bewegt ein rechtwinkliches Dreyekk ꝛc.

L. Wer sagt mir wohl, welchen Körper ich entstehen lasse, wenn ich in Gedanken von jeder Ekke dieses Zimmers eine gerade Linie bis an die Spitze unsers Kirchthurms ziehe? K. Eine Pyramide.

L. Aber was für eine? eine gerade oder schiefe? K. Natürlich eine schiefe.

L. Und welche Gestalt hat der obre Theil unsers Kirchthurms? K. (können hier vielleicht antworten: eine pyramidenförmige, oder eine kegelförmige).

L. Nun merkt noch folgendes: Wenn man eine Pyramide oder einen Kegel mit der Grundfläche parallel durchschneidet, so heißt das untere Stükk in dem einen Falle eine abgekürzte Pyramide, in dem andern ein abgekürzter Kegel. Dieß hier (No. 31. X.) ist eine abgekürzte Pyramide, und dieß (No. 23. X.) ein abgekürzter Kegel.

Neun-

Neünter Satz.

Lehrsatz.

L. Wenn diese Pyramide hier (No. 20.) höher wäre, als sie wirklich ist, würdet ihr sie dann für größer oder für kleiner halten, als sie jetzt ist. K. Für größer.

L. Wie aber, wenn sie zwar ihre jetzige Höhe behielte, aber auf ein Mahl eine größere Grundfläche bekäme, würde sie da an Größe ab- oder zunehmen? K. Sie würde an Größe zunehmen.

L. Allerdings! Ich will eüch hievon durch den Augenschein überzeügen, ob eüch gleich schon eüer Verstand sagt, daß die Sache nicht anders seyn kann. Seht die Fläche A. die ein Dreyekk ist, ist die Grundfläche dieser Pyramide (No. 20). Nun vergrößere ich diese Grundfläche, indem ich ein ihr gleiches Dreyekk noch hinzu setze und daraus ein Viereкk mache. (No. 21. so an No. 20. setzend, daß beyder Grundflächen ein Quadrat bilden). So! die Grundfläche ist jetzt größer geworden, die Höhe der ganzen Pyramide aber ist unverändert geblieben. Dadurch hat sie aber offenbar an Größe (körperlichem Inhalte) gewonnen, da ich ja dieses ganze Stükk (No. 21. zeigend) noch hinzugefügt habe. Und indem ich es wieder wegnehme, wird die Grundfläche, und somit die ganze Pyramide wieder kleiner. Jetzt werdet ihr mir sagen können, wovon auch bey Pyramiden, wohin auch, wie ihr wißt, die Kegel gehören, die Größe abhängt, oder: wodurch die

Größe der Pyramide völlig bestimmt wird? K. Von der (durch die) Grundfläche und Höhe.

L. Mit welchen Körpern stimmen hierin die Pyramiden überein? K. Mit den Prismen.

L. Wißt ihr noch, wie sich Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen zu einander verhalten? K. Sie sind einander gleich.

L. Wie werden sich denn wohl Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen zu einander verhalten? K. Sie sind auch einander gleich.

L. Faßt jetzt meine Frage und eure Antwort zusammen und sagt, wie der Satz dann lautet. K. Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

L. Aus welchem Grunde kann man dieses behaupten? K. Weil die Größe einer Pyramide durch ihre Höhe und Grundfläche vollkommen bestimmt wird; so müssen ja dergleichen Körper, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben, durchaus von einerley Größe seyn.

L. Und daß dem wirklich so sey, kann ich euch auch durch die Erfahrung bestätigen. Ich habe hier (No. 25. und 26.) zwey Pyramiden, wovon die eine ein gleichseitiges Dreyekk, die andere ein Parallelogramm zur Grundfläche hat, wenn wir nämlich die Ebenen, womit diese Oeffnungen bedekkt gedacht werden können, als die Grundflächen annehmen. Beyde Figuren haben gleiche Höhen, aber die Grundlinie des Dreyekks ist noch ein Mahl so lang, als die des Parallelogramms.

Wie

Wie müssen sich demnach beyde Figuren zu einander verhalten? K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Also haben beyde Körper gleiche Grundflächen. Und da jeder zwey Zoll hoch ist, so haben sie auch gleiche Höhen. Und nun sollt ihr sehen, daß die körperlichen Raüme, die sie einschließen, gleich groß sind.

> Man fülle hier die Pyramide No. 25, wie oben die Prismen, mit der gehörigen Accuratesse mit Sand und schütte diesen dann in die andere No. 26.

Ihr habt jetzt gesehen, daß die eine dieser Pyramiden gerade so viel Sand in sich faßt, als die andere. Was folgt hieraus? K. Daß sie gleich groß (die körperlichen Raüme, die sie einschließen, einander gleich) seyn müssen.

L. Aber sie haben doch nicht beyde eine gleiche Anzahl von Seitenflächen? K. Hierauf kommt nichts an.

L. Richtig! Es ist bey den Pyramiden gerade, wie bey den Prismen. Bey ganz verschiedener Anzahl der Seitenflächen können mehrere der erstern doch einander gleich seyn.

Zehnter Satz.

Erklärung.

L. Wie heißt denn wohl dieser Körper da (No. 33)? K. Kugel.

 L. Von

L. Von wie viel Flächen wird diese Kugel begrenzt? K. Von einer einzigen.

L. Zu welcher Art von Flächen gehört aber diese Fläche? K. Zu den krummen.

L. Nun merkt: Wenn ein Körper von einer einzigen Fläche begrenzt wird, so muß diese nothwendig krumm seyn, da eine einzige gerade Fläche nie einen körperlichen Raum einschließen (einen Körper ganz begrenzen) kann.

Es ist daher nicht nöthig, ausdrükklich zu sagen: diese Kugel wird von einer krummen Fläche begrenzt, sondern es ist genug, wenn wir sprechen: Diese Kugel wird von einer einzigen Fläche begrenzt. Denn hieraus folgt schon, daß diese krumm seyn müsse. Jezt sagt mir, von wie viel Flächen dieser Körper hier (ein Ey vorhaltend) begrenzt wird. K. Auch von einer einzigen.

L. Da werden wir diesen wohl auch eine Kugel nennen dürfen? K. Nein.

L. Warum nicht? K. Weil er nicht so ganz rund, wie eine (diese) Kugel ist. (Weil er länglich rund ist.)

L. Das heißt mit andern Worten: weil er auf eine andere Art von seiner Fläche begrenzt wird, als eine Kugel von der ihrigen. Wie, oder auf welche Art und Weise wird denn aber eine Kugel von ihrer Fläche begrenzt? Dieses sollt ihr jezt lernen. Seht, hier, (No. 34) habe ich eine in der Mitte durchschnittene Kugel, also zwey Halbkugeln. Auf der Durchschnittsfläche der einen

ist ein Punkt c bemerkt. Seht ihr ihn hier? Könnt ihr eüch jetzt (beyde Halbkugeln mit ihren Durchschnittsflächen an einander legend) diesen Punkt c, den ihr vorhin im Bilde gesehen habt, innerhalb dieser Kugel denken? K. Ja.

L. Nun merkt, was ich sage! Von dem Punkte, den ihr eüch jetzt denkt, und der innerhalb dieser Kugel liegt, ist diese Fläche hier (der Kugel Oberfläche zeigend) in allen ihren Punkten gleichweit entfernt. Wenn daher in dem von eüch jetzt gedachten Punkte ein kleines Thierchen wäre, und sich in gerader Linie heraus an die Oberfläche dieser Kugel bohren (begeben) wollte; so hätte es einerley Weg zu machen, es möchte hier, oder hier, oder hier (mehrere Punkte auf der Oberfläche der Kugel zeigend) herauskommen. Und wenn ich von 10, und 100 und 1000 und 10000 Punkten dieser Fläche (die Oberfläche der Kugel zeigend) gerade Linien bis an den von eüch gedachten Punkt zöge; so müßten diese Linien alle von einerley Länge seyn. Dieses Umstandes wegen kann ich sprechen: dieser Körper (auf No. 34. zeigend) wird von einer einzigen Fläche so eingeschlossen (begrenzt), daß jeder Punkt derselben (dieser Fläche) von einem gewissen in ihm (diesem Körper) liegenden Punkte gleichweit absteht. Und da diese Art der Begrenzung das Wesentliche einer Kugel ist; so nennen wir mit Recht diesen Körper (No. 33. oder 34.) eine Kugel. Wer alles, was ich jetzt gesagt habe, recht verstanden nnd behalten

hat,

hat, der wird mir gewiß sagen können, was man überhaupt unter dem Worte Kugel versteht. Wer sagt mir dieß? K. Einen Körper, welcher von einer einzigen Fläche so eingeschlossen wird, daß jeder Punkt derselben ꝛc.

L. Wer kann mir wohl auch sagen, was dieser Körper (das vorhin vorgezeigte Ey) mit einer Kugel gemein hat? K. Er wird auch nur von einer einzigen Fläche begrenzt.

L. Warum nennen wir ihn aber gleichwohl nicht Kugel? K. Weil er von seiner Fläche nicht so begrenzt wird, daß jeder Punkt derselben von einem gewissen in ihm liegenden Punkte gleichweit absteht.

L. Aber woher wißt ihr, daß innerhalb dieses Körpers kein Punkt vorhanden ist, welcher von allen Punkten der Oberfläche gleichweit absteht? K. —

L. Ihr schließt dieses, ohne daß ihr euch dessen deütlich bewußt seyd, aus der Gestalt dieses Körpers, und ihr schließt richtig. Denn in einem länglich runden Körper kann ein solcher Punkt nicht angetroffen werden. — Nun will ich sehen, ob ihr das, was ich jetzt thue, mit Worten richtig und bestimmt ausdrükken könnt. Merkt aber erst, daß dieses (No. 44. a) einen Halbkreis und dieses (zeigend) seinen Durchmesser vorstellen soll. (Den Halbkreis um seinen Durchmesser, der unbeweglich liegen bleibt, herum drehend). Nun! was thue ich jetzt? K. Sie drehen einen Halbkreis herum.

L. Aber

L. Aber um was, um welche Linie drehe ich ihn? K. Um seinen Durchmesser.

L. Rükke ich diesen dabey aus seiner Stelle oder nicht? K. Sie rükken ihn nicht aus seiner Stelle.

L. Also drehe ich diesen Halbkreis um seinen unbeweglichen Durchmesser. Was mag wohl der körperliche Raum, den dieser Halbkreis durchläuft, für einen Namen führen? Oder: welcher Körper mag wohl durch das Herumdrehen dieses Halbkreises entstehen? K. Eine Kugel.

L. Das habt ihr getroffen. Und ihr werdet mich nun verstehen, wenn ich sage: eine vollkommene Kugel kann man ebenfalls nur so, wie die übrigen bisher beschriebenen Körper, in Gedanken entstehen lassen und zwar dadurch, daß man einen Halbkreis um seinen unbeweglichen (unverrükkten) Durchmesser rings herum dreht oder: indem man sich vorstellt, daß sich ein Halbkreis um seinen unverrükkten Durchmesser herum drehe, bis er wieder in seine erste Lage kommt. —— Nun sagt mir doch, ob ihr glaubt, daß eine Kugel auch Grund- und Seitenflächen, wie die übrigen bisher beschriebenen Körper, haben könne. K. Das glauben wir nicht.

L. Aber warum nicht? K. Weil eine Kugel nur eine einzige Fläche hat, die ihm weder zur Grundfläche noch zur Seitenfläche dient, indem sie sie ja allenthalben umgiebt.

L. Ihr habt Recht. Keine der angeführten Benennungen paßt auf die die Kugel begrenzende Flä-

fläche. Man nennt sie bloß Kugelfläche oder der Kugel Oberfläche. Seht! jetzt bewegt sich einer meiner Finger auf dieser Kugel Oberfläche herum. — Welcher Name mag sich denn aber wohl für den Punkt schikken, der gerade in der Mitte der Kugel liegt, und von welchem die Oberfläche allenthalben (in allen ihren Punkten) gleichweit entfernt ist? K. Der Kugel Mittelpunkt.

L. Gut! Wie wolltet ihr aber sprechen, wenn ihr einander sagen solltet, was man unter dem Mittelpunkte einer Kugel versteht. K. Da würden wir sprechen: Der Mittelpunkt einer Kugel ist derjenige Punkt, welcher innerhalb der Kugel liegt und von welchem die Oberfläche in allen ihren Punkten gleichweit entfernt ist.

L. Nun betrachtet hier auf der Durchschnittsfläche dieser Halbkugel (No. 34) die Linie a b und sagt, ob sie gerade oder krumm ist, und durch welchen merkwürdigen Punkt sie geht. K. Sie ist gerade und geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

L. Sagt mir, ob ihr euch jetzt (die beyden Halbkugeln mit ihren Durchschnittsflächen auf einander legend) die Linie a b noch denken könnt. K. Ey freylich.

L. Sagt mir auch, ob sich die Merkmale, die ich jetzt angeben werde, an dieser (von euch gedachten) Linie befinden. Die Linie, die ihr euch jetzt denkt, ist gerade. K. Richtig!

L. Geht durch diese Kugel. K. Auch recht!

L. Und zwar durch den Mittelpunkt derselben. K. Wieder richtig!

L. Und

L. Und wird an ihren beyden Enden von der Kugelfläche begrenzt. K. Auch recht!

L. Da sich alle diese jetzt von mir angegebenen Merkmahle an der von euch gedachten Linie befinden; so muß ich sie den Durchmesser oder die Axe dieser Kugel (No. 34) nennen. Jetzt sagt mir, was die Linie, die wir die Axe (den Durchmesser) einer Kugel nennen sollen, für Merkmahle haben muß. K. Sie muß ꝛc.

L. Wie aber, wenn eine gerade Linie nur von dem Mittelpunkte einer Kugel bis an ihre Oberfläche gezogen würde, könnte sie dann wohl Durchmesser heißen? K. Nein.

L. Welche Benennung paßte wohl für eine solche Linie? K. Halbmesser.

L. Richtig! Betrachtet jetzt hier die Linien c f, cb, ed, ce, (die Durchschnittsfläche von No. 34. vorzeigend). So! Könnt ihr euch jetzt (beyde Halbkugeln mit ihren Durchschnittsflächen gehörig auf einander legend) diese Linien noch denken? K. Ja.

L. Was sind es für Linien, die ihr euch jetzt denkt? K. Halbmesser dieser Kugel.

L. Warum glaubt ihr, daß diese Linien Halbmesser dieser Kugel seyen? K. Weil sie gerade sind und von dem Mittelpunkte bis an die Oberfläche reichen.

L. Da ihr wißt, daß die Kugelfläche in allen ihren Punkten gleichweit von dem Mittelpunkte der Kugel entfernt ist, so könnt ihr mir sagen, ob die

Halb-

Halbmesser einer Kugel von einerley oder von verschiedener Länge seyn müssen. K. Sie müssen alle von einerley Länge seyn.

L. Aus welchem Grunde behauptet ihr dieses? K. Weil ꝛc.

L. Wie werden sich aber wohl alle Durchmesser einer Kugel zu einander verhalten? K. Auch diese müssen alle einander gleich seyn?

L. Warum? K. Weil ein Durchmesser immer aus zwey Halbmessern besteht, und alle Halbmesser einer Kugel einander gleich sind. (Weil die Durchmesser als die Ganzeu und die Halbmesser als ihre Hälften betrachtet werden können, und die Ganzen sich eben so, wie ihre Hälften zu einander verhalten.).

L. Wie meint ihr aber, daß sich sowohl die Halb- als die Durchmesser von zwey gleichen Kugeln zu einander verhalten? K. Auch diese müssen einander gleich seyn?

L. Richtig! denn der nämliche Halbkreis, der die eine von zwey gleichen Kugeln beschreibt, muß auch die andere beschreiben. Und da dieses Halbkreises Halb- und Durchmesser zugleich auch der Halb- und Durchmesser der von ihm beschriebenen Kugeln ist: so ist klar, daß diese alle gleiche Halb- und Durchmesser haben müssen.

Eilfter Satz.

Erklärung.

L. (welcher No. 43. vor sich auf den Tisch gelegt hat.) Seht, jetzt liegen die 4 Winkel a, b, c und d mit ihren Spitzen in einem gemeinschaftlichen Punkte in einer und derselben Ebene; denn diese 4 Dreyekke bilden jetzt nur eine einzige ebene Fläche. Oder: die Spitzen dieser vier in einer und der nämlichen Ebene liegenden Winkel stoßen jetzt in Einem Punkte zusammen. Jetzt aber (mit den besagten vier Dreyekken einen körperlichen Winkel bildend, dem in No. 25. dargestellten gleich) liegen die Winkel a, b, c und d nicht mehr in Einer, sondern in 4 verschiedenen Ebenen, stoßen aber mit ihren Spitzen immer noch in Einem Punkte zusammen. Dadurch entsteht, wie ihr seht, eine Höhlung, welche man einen körperlichen Winkel (Ekke eines Körpers) nennt. Seht, hier (No. 25. 26. 27.) sind auch solche Höhlungen, welche ebenfalls dadurch entstanden sind, daß mehrere ebene, aber nicht in einer Ebene (ebenen Fläche) liegende Winkel mit ihren Spitzen zusammenstoßen, und welche deswegen auch körperliche Winkel genannt werden. Dergleichen Winkel oder Ekken finden sich an jedem Körper, welcher von lauter ebenen Flächen begrenzt wird, weswegen ein solcher Körper auch ein ekkiger Körper heißt, da man hingegen den, welchen eine krumme Fläche ganz oder zum Theil einschließt, rund nennt. — Sucht mir doch ein Mahl aus diesen Körpern (No. 3. 5.

7. 15. 19. 30. 33. 24. 8 B³ vorlegend) die runden heraus. K. (thun dieß).

L. Warum rechnet ihr denn diese zwey Körper No. 15. und 30. unter die runden? K. Weil jeder zum Theil von einer krummen Fläche begrenzt wird.

L. Warum rechnet ihr aber diesen (No. 33.) unter die runden Körper? K. Weil er ganz von einer krummen ꝛc.

L. Ist dieser Körper (No. 8 B³ ergreifend) auch rund? K. Nein.

L. Wie denn? K. Ekkig.

L. Warum nennt ihr ihn so? K. Weil er von lauter ebenen Flächen begrenzt wird.

L. Wie viel Ekken hat denn dieser Körper? K. Acht.

L. Von wie viel ebenen Winkeln wird denn jede seiner Ekken gebildet? K. (nach der Untersuchung). Von dreyen.

L. Recht! Hier z. B. bilden die Winkel x, y und z (diese Winkel an dem Würfel zeigend) eine Ekke. Es sind dieß drey mit ihren Spitzen zusammenstoßende Winkel von drey Quadraten. Und hier an diesem Tische ꝛc. bilden diese 3 Winkel (diese zeigend und mit einem Finger an ihren Schenkeln hinfahrend) eine Ekke. — — Nun seht, ob ihr unter diesen Körpern (mehrere ekkige Körper vorlegend) nicht einen findet, dessen Ekken etwa nur von zwey ebenen Winkeln gebildet würden. K. (nach der Untersuchung). Ein solcher Körper ist nicht da. L.

L. Es kann auch keiner da seyn; denn jede Ekke eines Körpers (jeder körperliche Winkel) muß wenigstens von drey ebenen Winkeln, die alle in verschiedenen Ebenen liegen, gebildet werden. Da ich sage: wenigstens, so werdet ihr schon von selbst auf den Gedanken kommen, daß auch mehr als drey ebene Winkel zur Bildung eines körperlichen Winkels gebraucht werden können. So wird z. B. die Spitze dieser Pyramide (No. 23.) von vier, und die Spitze von dieser da (No. 24.) von fünf ebenen Winkeln gebildet. Daß übrigens auch körperliche Winkel von verschiedener Größe seyn können, davon könnt ihr euch am besten überzeugen, wenn ihr diesen (No. 25.) und diesen körperlichen Winkel (No. 27.) betrachtet. Denn der Augenschein lehrt euch, daß der letztere größer als der erstere ist.

Zwölfter Satz.

Erklärung.

L. Wer sagt mir denn geschwind, wenn man eine Figur regulär nennt? K. Wenn sie ꝛc. (S. p. 74. des ersten Bdchs.)

L. Welche Art von Dreyekken gehört denn unter die regulären Figuren? K. Das gleichseitige.

L. Nun betrachtet diesen Körper (No. 36.) wieder und sagt mir noch ein Mahl, von welchen Figuren er begrenzt wird. K. Von lauter Dreyekken.

L. Un-

L. Unter welche Art von Dreyekken gehören diese? K. Unter die gleichseitigen.

L. Nunmehr könnt ihr mir schon sagen, ob dieser Körper (No. 36.) von lauter regulären oder von lauter irregulären Figuren begrenzt wird. K. Er wird von lauter regulären begrenzt.

L. Sind diese regulären Figuren alle congruent (gleich und ähnlich) oder nicht? K. Sie sind alle congruent.

L. Wir können daher sprechen: Dieser Körper wird von lauter congruenten regulären Figuren begrenzt. Ich will sehen, ob ihr dieses jetzt aufgefundene Merkmahl behalten, und mir nachher, wenn ich darnach frage, wieder angeben könnt. Nun sagt mir, wie viel ebene Winkel immer eine Ekke dieses Körpers bilden? K. Drey.

L. Könnt ihr mir sagen, wie viel Grade jeder dieser ebenem Winkel haben muß? K. Sechzig.

L. Woher wißt ihr dieses? K. Daher, weil jeder Winkel eines gleichseitigen Dreyekks 60 Grad hat.

L. Wenn ich nun spräche: jeder dieser (zeigend) körperlichen Winkel (Ekken) ist aus 3 Mahl 60 Graden zusammen gesetzt, behauptete ich da etwas Wahres oder etwas Falsches? K. Etwas Wahres.

L. Nun so wiederholt diese Behauptung, damit ihr sie desto besser behaltet. K. (wiederholen).

L. Jetzt sagt mir, ob einer von diesen vier körperlichen Winkeln (an No. 39.) größer oder klei-

ner

ner als die übrigen seyn kann. K. Das kann nicht seyn.

L. Warum nicht? K. Weil jeder aus 3 Mahl 60 Graden zusammen gesetzt ist (von 3 ebenen Winkeln, wovon jeder 60 Grad hält, gebildet wird).

L. Ihr habt Recht! Wie verhalten sich demnach alle diese körperlichen Winkel zu einander? K. Sie sind alle einander gleich.

L. Das ist ein zweites Merkmahl, welches wir jetzt an diesem Körper aufgefunden haben. Gebt mir nun alle beyde an, wenn ich frage: was haben wir jetzt an diesem Körper bemerkt? K. Wir haben bemerkt, daß er von lauter congruenten regulären Figuren begrenzt wird, und lauter gleiche körperliche Winkel (Ekken) hat.

L. Da ist also dieses ein regulärer Körper. Denn jeder Körper, an welchem sich die zwey jetzt von euch angegebenen Merkmahle befinden, heißt regulär, jeder andere aber irregulär. Gesetzt, wir wollten diesen Körper da (No 8. B³) regulär nennen, welche Merkmahle müßten sich denn da an ihm befinden? K. Er müßte von lauter congruenten regulären Figuren begrenzt seyn, und lauter gleiche körperliche Winkel (Ekken) haben.

L. Wir wollen doch ein Mahl sehen, ob sich diese Merkmahle an ihm befinden oder nicht. Was für Figuren sind denn die ihn einschließenden Flächen. K. Lauter Quadrate.

L. Sind diese reguläre oder irreguläre Figuren? K. Reguläre.

L. Und

L. Und wie sich diese Quadrate alle zu einander verhalten, wißt ihr schon: sagt, wie? K. Sie sind alle einander gleich.

L. Also dekken sie einander, sind folglich congruent. Das erste Merkmahl eines regulären Körpers hätten wir also an diesem Würfel aufgefunden. Wir wollen nun nach dem zweiten forschen. Wie viel ebene Winkel bilden denn hier eine Ekke? K. Drey.

L. Was sind denn dieß für Winkel? K. Rechte.

L. Jeder dieser körperlichen Winkel wird also gebildet: — ? K. Von drey rechten Winkeln.

L. Wie meynt ihr nun? müssen diese körperlichen Winkel einander gleich seyn oder nicht? K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Warum? K. Weil jeder derselben von drey rechten Winkeln gebildet wird (aus 3 Mahl 90 Grad zusammen gesetzt ist).

L. Gut! Nun könnt ihr sagen, ob ein Würfel unter die regulären Körper gehört oder nicht. K. Er gehört darunter.

L. Da gehört gewiß dieses Parallelepipedum (N 6. vorlegend) auch darunter? K. Nein, es gehört nicht darunter.

L. Aber es werden doch alle seine Ekken eben so, wie die des Würfels, von drey rechten Winkeln gebildet? K. Aber es wird nicht von lauter congruenten regulären Figuren begrenzt.

L. Da habt ihr Recht! Das eine Merkmahl eines regulären Körpers fehlt diesem Parallelepipedum.

Man

Man lege hier den Kindern etwa noch die Nummern 3. 4. 20. 24. vor, frage, ob sie sie unter die regulären oder irregulären Körper rechnen, und lasse sie die Gründe ihrer Behauptungen angeben. Durch dergleichen Uebungen wird nicht nur der Forschungs- und Prüfungs-Geist angeregt: sondern es prägen sich auch die Wahrheiten, welche gleichsam zum Maßstabe der Untersuchungen dienen, dem Gedächtnisse desto tiefer ein.

L. Diese Körper (No. 3. 4. 20. 24.) sind also nicht regulär. Was haltet ihr aber von diesem (No. 37.)? Sollte der wohl auch nicht regulär seyn? K. Dieser scheint es zu seyn.

L. Er ist es auch wirklich. Denn er wird von lauter gleichseitigen und gleichen Dreyekken, folglich von lauter congruenten regulären Figuren begrenzt, und hat lauter gleiche körperliche Winkel (Ekken), indem jeder derselben von vier Mahl 60 Grad (von vier ebenen Winkeln, wovon jeder 60 Grad hält) zusammen gesetzt ist. — Jetzt sagt mir, was für Figuren die Flächen dieses Körpers (No. 38.) sind. K. Lauter Fünfekke.

L. Scheinen sie euch regulär oder irregulär zu seyn? K. Regulär.

L. Dieß sind sie auch. Welches von diesen Fünfekken haltet ihr wohl für das größte? K. Da scheint eins so groß als das andere zu seyn.

L. Auch hier trügt euch euer Augenmaß nicht. Wir dürfen demnach von den Flächen, die diesen Körper einschließen, behaupten — nun! was? K. Daß es lauter congruente reguläre Figuren seyn.

L. Nun wollen wir die Ekken (körperlichen Winkel) untersuchen. Von wie viel ebenen Winkeln wird jeder gebildet? K. Von dreyen.

L. Von welcher Figur ist jeder davon ein Winkel? K. Von einem regulären Fünfekk.

L. Daß der Polygon-Winkel eines regulären Fünfekks 108 Grad halte, wird eüch noch bekannt seyn. Von wie viel Graden ist sonach jede Ekke dieses Körpers (No. 38.) zusammengesetzt? K. Von 3 Mahl 108. oder von 324.

L. Nun sagt, ob dieser Körper regulär ist oder nicht. K. Er ist regulär.

L. Was für einen Grund habt ihr, dieses zu behaupten? K. Er wird ja von lauter congruenten regulären Figuren begrenzt und ꝛc.

L. Richtig! Jetzt untersucht doch durch Hülfe eüres Augenmaßes auch diesen Körper (No. 39.) gar und sagt, ob ihr ihn für regulär haltet oder nicht. K. Wir halten ihn auch für regulär.

L. Warum haltet ihr ihn dafür? K. Weil er, so viel der Augenschein lehrt, von lauter gleichen gleichseitigen Dreyekken, also von lauter congruenten regulären Figuren begrenzt wird, und lauter gleiche Ekken hat.

L. Ihr urtheilt, was die Flächen anbelangt, ach dem Augenscheine richtig. Wie wollet ihr mich aber überzeügen, daß die körperlichen Winkel alle gleich seyn müssen, wenn ich dieß bezweifelte? K. Jeder dieser Winkel wird von fünf ebenen Winkeln, wovon jeder, weil er der Winkel eines gleich-

gleichseitigen Dreyekks ist, 60 Grad hält, gebildet. Es ist also jede solche Ekke aus 5 Mahl 60 oder 300 Graden zusammen gesetzt.

L. Das war recht! Nun haben wir mehrere reguläre Körper vor uns liegen. Wie viel sind deren? K. Fünf.

L. Dieß ist die ganze Anzahl aller regulären Körper, die möglich sind. Mehr als ihrer fünf kann es — so auffallend auch dieß den Unkundigen scheint — nicht geben. In der Folge werde ich eüch dieß beweisen, wenn ich eüch nämlich die hiezu nöthigen Wahrheiten werde bekannt gemacht haben. Jetzt wollen wir nur erst einem jeden dieser fünf regulären Körper einen Namen geben. Von wie viel Flächen ist denn dieser da (No. 36.) begrenzt? K. Von vieren.

L. Daher nennt man ihn ein Vierflach, oder, welcher (griechische) Name üblicher ist, Tetraëdrum. Ein Name, der eben so viel sagt, als der erst angeführte deütsche. Dieser Körper hier No. 8. B³. heißt — ? K. Würfel.

L. Man nennt ihn auch Hexaëdrum, zu deütsch Sechsflach. Nun gebt diesem hier (No. 37.) auch einen Namen, der von der Anzahl seiner Flächen hergenommen ist. K. Achtflach.

L. Recht! Sein griechischer Name ist Oktaëdrum. Nun zählt die Flächen dieses Körpers (No. 38.) und gebt ihm dann einen Namen. Damit ihr aber beym zählen nicht irre werdet, so macht auf jede Fläche, die ihr gezählt habt, einen

 Strich

Strich mit Kreide. K. (nach der Zählung.) Dieser kann Zwölfflach heißen.

L. Auch recht! Auf griechisch heißt er Dodekaëdrum. Nun gebt auch diesem (No. 39.) gar einen von der Zahl seiner Flächen hergenommen Namen. K. (Zählen die Flächen und sprechen:) Zwanzigflach.

L. Gut! Sein griechischer Name ist Ikosaëdrum.

Man übe hier den Kindern auch die griechischen Namen ein, weil sie haüfiger, als die deütschen vorkommen.

Dreyzehnter Satz.

Lehrsatz.

L. (, welcher No. 3. vor sich hat.) Wir wollen jetzt die drey ebenen Winkel m, n, o die hier diese Ekke bilden, zum Gegenstande unserer Unterredung machen und sehen, wie sich immer je zwey und zwey derselben zu dem dritten verhalten. Zu welcher Art von Winkeln gehört denn der Winkel m? K. Zu den rechten.

L. Und der Winkel o? K. Auch zu den rechten.

L. Aber der Winkel n? K. Dieser gehört zu den spitzigen.

L. Wenn ihr einen spitzigen zu einem rechten Winkel addirt, macht da die Summe mehr oder weniger, als ein rechter? K. Offenbar mehr.

L. Da

L. Da ihr dieß wißt, so könnt ihr mir sagen, ob die Winkel m und n zusammen genommen größer oder kleiner sind, als der Winkel o. K. Diese sind größer.

L. Warum behauptet ihr dieses? K. Weil ein spitziger und ein rechter Winkel zusammen genommen offenbar mehr betragen müssen, als ein einziger rechter.

L. Gut! Jetzt sagt mir, ob die Winkel m u. o zusammen genommen größer oder kleiner als der Winkel n seyn müssen. K. Diese müssen viel größer seyn.

L. Warum denn? K. Weil m und o zwey rechte sind, n aber nur ein spitziger und daher schon kleiner als Ein rechter ist.

L. Aber wie werden sich die Winkel n und o zusammen genommen zu m verhalten? K. Diese müssen wieder größer als m seyn.

L. Warum? K. Weil ein spitziger und rechter Winkel zusammen größer seyn müssen, als ein rechter.

L. Was können wir nun von je zweyen und zweyen dieser drey ebenen Winkel behaupten? K. Daß sie zusammen genommen größer als der dritte sind.

L. Was ihr hier in einem einzelnen Falle gefunden habt, das ist allgemein wahr. **Von drey ebenen Winkeln, die einen körperlichen Winkel bilden, sind nämlich alle Mahl jede zwey zusammen größer als der dritte.**

Den

Den Beweis für diesen Satz übergehe ich hier, weil ihr ihn noch nicht verstehen würdet. *).

Vierzehnter Satz.

Lehrsatz.

L. (, welcher No. 36. vor sich hat.) Hier an diesem Körper bilden

1) die

*) Für Lehrer, die diesen Beweis bey der Hand haben möchten, setze ich ihn hieher:

Sind die drey in Rede stehenden Winkel einander gleich, wie bey dem Tetraedrum, so ist der Satz an sich klar, da jede zwey von drey gleichen Größen zusammen größer, als die dritte seyn müssen. Sind sie ungleich, so sey A (Fig. 3. Tab. I.) ein körperlicher Winkel, gebildet von den ebenen Winkeln B A C, B A D und C A D, wovon ∠ B A C größer als ∠ B A D und nicht kleiner als ∠ C A D angenommen wird. In der Ebene, die durch B A C gelegt gedacht wird, mache man den ∠ B A E = dem ∠ B A D; nehme A E von willkührlicher Länge und mache auch A D = A E. Hierauf ziehe man durch E eine gerade Linie, welche A B und A C in B und C schneidet und ziehe noch B D und D C. Da auf diese Art der ∠ BAE = ∠ BAD, und AE = AD, u. AB den Triangeln B A E und B A D gemein ist: so findet sich hier ein Merkmahl der Congruenz zweyer Dreyekke, und es muß folglich B E = B D seyn. Nun ist B D + D C größer als B C, folglich auch größer als B D + E C, weil wegen der Gleichheit beyder Linien B D statt C E gesetzt werden kann.

Dem-

1) die ebenen Winkel b, g und h;
2) — — — c, d und i;
3) — — — e, f und k;
4) — — — v, y und z;
} einen körperlichen Winkel.

Nun sagt, ob b und g zusammen genommen größer oder kleiner sind, als h. K. Nach unserm vorigen Satze sind sie größer.

L. Nach

Demnach giebt B D vereinigt mit D C eine größere Summe, als B D + E C, es muß also D C größer als E C seyn. In den beyden Dreyekken D A C und E A C ist E A = A D und A C = A C. Wenn aber zwey Seiten in einem Dreyekke so groß als in einem andern sind, die dritte Seite in dem einen hingegen größer als in dem andern ist: so steht der größern Seite auch ein größerer Winkel gegen über. Es ist folglich der Winkel D A C größer als der Winkel E A C. Hieraus folgt, daß, weil ∠ B A E gleich gemacht worden ist dem ∠ B A D, ∠ B A D + ∠ D A C mehr betragen muß, als ∠ B A E + E A C, indem Gleiches zu Ungleichem addirt Ungleiches giebt. Die Winkel B A E und E A C machen aber den Winkel B A C aus, folglich ist ∠ B A C + D A C größer als ∠ B A C. Nun ist ∠ B A C nicht kleiner als ∠ C A D, also wenigstens eben so groß als dieser Winkel. Kommt nun noch ∠ B A D zu dem ∠ B A C, so muß dadurch offenbar eine Summe entstehen, die größer als ∠ D A C ist. Endlich da ∠ B A C allein genommen schon größer als ∠ B A D ist, so muß offenbar ∠ B A C + ∠ C A D größer seyn, als ∠ B A D. Es sind demnach jede zwey von den Winkeln B A C, B A D, D A C zusammen größer, als der dritte.

L. Nach eben diesem Satze sind diese zwey Winkel (c und d zeigend) zusammen größer als dieser (i zeigend) und diese zwey (e und f zeigend) zusammen größer als dieser (k zeigend). Diese sechs Winkel (b, g, c, d, e und f zeigend) zusammen genommen sind also größer, als diese drey da (h, i und k zeigend). Jetzt sagt mir, wie groß die drey Winkel eines Dreyekks zusammen genommen sind. K. So groß als zwey rechte.

L. Nun könnt ihr mir sagen, ob diese sechs Winkel, nämlich b, g, c, d, e und f zusammen genommen mehr oder weniger als zwey rechte betragen müssen. K. Sie müssen mehr betragen.

L. Aus welchem Grunde kann man dieses behaupten? K. Weil sie (die genannten 6 Winkel) zusammen mehr betragen als diese drey (h, i und k zeigend), und diese letztern doch gerade gleich zwey rechten Winkeln sind.

L. Gut! Merkt recht, was ihr jetzt von diesen sechs Winkeln da (zeigend) behauptet habt, daß sie nämlich alle mit einander vereinigt mehr betragen — ? K. Als zwey rechte.

L. Nun sagt, wie viel rechte Winkel die Winkel dieser drey Triangel (b x c, d y e, f z g zeigend) zusammen ausmachen müssen. K. Sechs rechte Winkel, weil die Winkel jedes Dreyekks zusammen deren zwey betragen.

L. Wenn ich schon mehr als zwey rechte Winkel habe, muß ich dann noch mehr oder weniger als vier rechte (Winkel) hinzufügen, wenn ich deren sechs (sechs rechte Winkel) erhalten will? K.

Ich muß weniger als vier rechte Winkel noch hinzufügen.

L. Wenn wir die Winkel b, g, c, d, e und f haben, so haben wir mehr — ? K. Als zwey rechte.

L. Wenn wir zu diesen 6 Winkeln noch die Winkel x, y und z fügen, so erhalten wir gerade 6 rechte. Nun frage ich, ob die 3 zuletzt genannten Winkel, nämlich diese da (x y und z zeigend) mehr oder weniger als vier rechte betragen müssen. K. Sie müssen weniger betragen.

L. Warum? K. Weil diese drey Winkel vereinigt mit diesen sechsen b, g, c, d, e und f zeigend) gerade sechs rechte Winkel geben, und diese letztern schon mehr als zwey rechte betragen.

L. Gut! Die drey ebenen Winkel x y und z liegen um einen Punkt herum, aber nicht in einer Ebene, bilden also einen körperlichen Winkel. Und von diesen drey Winkeln haben wir jetzt bewiesen, daß sie zusammen kleiner als vier rechte seyn müssen. Auf eine ähnliche Art läßt sich dieß von einer jeden Anzahl ebener Winkel, die einen körperlichen bilden, beweisen, so daß wir also folgenden Lehrsatz aufstellen können:

Drey oder mehr ebenen Winkel, die einen körperlichen Winkel bilden, müssen zusammen alle Mahl kleiner also — was wohl zu merken ist — nie so groß, noch weniger größer, als vier rechte seyn.

Zur Uebung lege man nun No. 23. und No. 24. vor und lasse beweisen, daß sowohl die 4 ebenen

Win-

Winkel, welche in der Spitze der erstern, als die 5, welche in der Spitze der letztern Nummer zusammenstoßen, zusammen kleiner, als 4 rechte seyn müssen. Bey der erstern Nummer wird der Beweis folgendermassen lauten: Die Grundfläche ist ein Viereck, also sind die Winkel derselben zusammen genommen gleich 4 rechten. Die Winkel a, b, c, d, e, f, g, h, müssen nach dem 13ten Satze zusammen mehr als vier rechte betragen. Die 4 Seitenflächen sind Dreyekke, daher müssen ihre 12 Winkel zusammen = 8 R seyn. Da nun die Winkel a, b, c, d, e, f, g und h schon mehr als 4 R betragen, so müssen die 4, die Spitze bildenden, ebenen Winkel weniger als 4 R ausmachen.

Bey der letztern Nummer lautet der Beweis also: Die Grundfläche ist ein Fünfekk, seine Winkel zusammen genommen sind also, da es in drey Dreyekke zerfällt werden kann, gleich 6 R. Die Winkel a. b, c, d, e, f, g, h, i, k zusammen genommen müssen nach dem 13ten Satze größer als 6 R seyn. Die 5 Seitenflächen dieser Pyramide sind 5 Dreyekke, ihre Winkel zusammen müssen daher gleich seyn 10 R. Da nun die Winkel a, b, c, d, e, f, g, h, i und k schon mehr als 6 R betragen; so müssen die 5, die Spitze bildenden, ebenen Winkel weniger, als 4 R ausmachen.

Fünfzehnter Satz.

Zusatz.

L. Aus unserm zuletzt erwiesenen Lehrsatze folgt, daß es nicht mehr als die fünf euch bereits bekannten regulären Körper geben könne. Denn 1) von regulären (gleichseitigen) Dreyekken können keine andern als diese drey (No. 36. 37. 39.) Körper eingeschlossen werden. Sollte etwa ein vierter von dergleichen Dreyekken begrenzt werden, so müßten seine Ekken durch Zusammenfügung von wenigstens sechs Dreyekkswinkeln, wovon jeder 60 Grad hielte, entstehen, da hier (No. 36.) drey, hier (No. 37) vier, und hier (No. 39) fünf dergleichen ebene Winkel schon die Ekken bilden.

Aus sechs ebenen Winkeln aber, wovon jeder 60 Grad hat, läßt sich keine Ekke bilden. Den Grund hievon will ich euch aufsuchen helfen. Wie viel Grade halten denn 6 Winkel, jeder von 60 Grad? K. 360.

L. Wie viel rechte Winkel geben diese? K. vier.

L. Wie groß dürfen aber drey oder mehrere ebene Winkel, die eine Ekke bilden sollen, nicht seyn? K. So groß als vier rechte.

L. Nun könnt ihr mir sagen, warum sich aus sechs Winkeln, jeder zu 60 Grad, kein körperlicher Winkel bilden läßt. Sagt es. K. Weil sechs dergleichen Winkel gleich vier rechten sind, und doch die

die ebenen Winkel, die eine Ekke bilden sollen, zusammen kleiner, als vier rechte seyn müssen.

L. Da nun sechs gleichseitige Dreyekke mit ihren Winkeln nicht zusammenstoßen und eine Ekke bilden können; so ist dieß noch weniger bey sieben, achten oder jeder größern Anzahl möglich, und hiemit dargethan, daß von regulären Dreyekken nicht mehr als diese drey Körper gebildet werden können, indem ja wie ihr wißt, zwey ebene Winkel keine Ekke bilden, also auch kein Körper möglich ist, wo etwa noch weniger ebene Winkel, als hier (No. 36), zusammen stießen und dessen Ekken bildeten.

2) Von lauter regulären Vierekken, d. h. von Quadraten kann gar nur dieser einzige Körper No. 8. B³. eingeschlossen werden. Denn sollte außer diesem noch ein anderer von den genannten Figuren begrenzt werden, so müßten seine Ekken doch wenigstens von vier rechten Winkeln gebildet werden, da dieses Körpers (No. 8.) Ekken schon aus dreyen dergleichen zusammen gesetzt sind. Läßt sich aber aus vier rechten Winkeln ein körperlicher Winkel bilden? K. Nein.

L. Also vier Quadrate können mit ihren Winkeln nicht zusammen stoßen und eine Ekke bilden. Wie aber, wenn man fünf, sechs, sieben oder mehr der genannten Figuren mit ihren Winkeln in einem Punkte zusammen stoßen und daraus eine Ekke bilden wollte? K. Das ist noch weniger möglich.

L. Warum? K. Weil dann gar fünf, sechs, sieben oder mehr rechte Winkel ein Ekke bilden müßten, da doch schon ihrer vier zu groß dazu sind.

L. Also

L. Also mit lauter Quadraten läßt sich kein anderer Körper als der Würfel bilden (begrenzen). Nun wollen wir

3) zu den regulären Fünfekken gehen. Wie viel dieser Figuren stoßen immer hier (No. 38) mit ihren Winkeln in Einem Punkte zusammen, um eine Ekke zu bilden? K. Drey.

L. Die nächste Zahl nach Drey ist — ? K. Vier.

L. Wie? Wenn nun vier dergleichen Fünfekkswinkel in einem Punkte zusammen stießen und eine Ekke bildeten? K. —

L. Wir wollen sehen, ob dieß möglich ist. Wie viel Grad hält der Polygonwinkel eines regulären Fünfekks? K. 108.

L. Und diese Zahl 4 Mahl genommen? K. Macht 432.

L. Sind 432 — Grad mehr oder weniger als 4 rechte Winkel? K. Weit mehr.

L. Meynt ihr nun, daß sich aus 4 Winkeln des regulären Fünfekks eine Ekke bilden lasse? K. Nein.

L. Warum nicht. K. Weil diese zusammen größer, als vier rechte sind, und die ebenen Winkel, die eine Ekke bilden sollen, kleiner, als vier rechte seyn müssen.

L. Da schon vier reguläre Fünfekke nicht mehr zu einem körperlichen Winkel zusammenstoßen können; so ist dieß ja noch weniger bey einer größern Anzahl möglich. Folglich kann von regulären Fünf-

ekken

ekken kein anderer Körper als dieser (No. 38.) begrenzt werden. Nun fragt sichs aber, ob nicht etwa lauter reguläre Sechsekke, Siebenekke u. s. w. einen Körper begrenzen können? Wir wollen sehen. Die geringste Anzahl von ebenen Winkeln, die in einem Punkte zusammen stoßen und eine Ekke bilden können, ist — ? K. Drey.

L. Der Polygonwinkel des regulären Sechsekks hält 120 Grad. Können nun drey dergleichen Winkel einen körperlichen Winkel bilden? K. Nein.

L. Warum nicht? K. Weil diejenigen ebenen Winkel, die einen körperlichen bilden sollen, zusammen weniger, als 360 Grad (4 R) betragen müssen.

L. Sechsekkswinkel können sonach keine Ekke bilden, also Sechsekke überhaupt keinen (geometrischen) Körper begrenzen. Noch weniger sind lauter reguläre Sieben- oder Achtekke oder Figuren von noch mehr Seiten zur Begrenzung eines Körpers tauglich. Denn da z. B. der Polygonwinkel des regulären Siebenekks $128\frac{4}{7}$, und der des regulären Achtekks 135 Grad hält, so können weder drey der erstern, noch drey der letztern Figuren zusammen stoßen, und eine Ekke bilden, folglich auch keinen Körper begrenzen. Ihr seht hieraus, daß es schlechterdings unmöglich ist, sich andere reguläre Körper zu denken oder zu verfertigen, als die fünf euch bekannten.

Um das Gesagte den Kindern durch Anschauung zu bestätigen, lege man die 4 Dreyekke No. 45. so zusammen, wie Fig. 11. Tab. I. zeigt, und sage: hier habe ich ein reguläres Sechsekk. Nun will

will ich drey Winkel davon nehmen und sehen, ob ich damit einen körperlichen Winkel bilden kann. — Nein das geht nicht. Seht wie ich auch diese 3 Winkel halte, so passen sie nicht zu einem körperlichen Winkel zusammen.

Sechzehnter Satz.

Erklärung.

L. Ein Stükk von (No. 10) vorlegend, was für ein Körper ist dieß? K. Ein Würfel.

L. Nehmt hier unsern Maßstab und meßt damit die Seite dieses Würfels, und sagt, wie lang sie ist. K. (mißt und spricht:) Einen Zoll.

L. Da könnte ich also sagen: Das ist ein Würfelzoll. Allein dieser Ausdrukk ist nicht üblich, sondern man spricht: das ist ein Cubikzoll, welches Wort aber eben so viel heißt als: Würfelzoll, d. h. ein Würfel, dessen Seite einen Zoll lang ist. Das Wort Cubik ist nämlich aus dem lateinischen Worte Cubus, welches auf deůtsch Würfel heißt, gemacht worden. Gesetzt nun, ich hätte einen Würfel, dessen Seite einen Schuh lang wäre, paßte wohl da die Benennung Würfelzoll oder Cubikzoll auch auf ihn? K. Nein.

L. Welcher Name möchte dann wohl für ihn passend seyn? K. Cubikschuh.

L. Gut!

L. Gut! Seht, dieß ist ein Cubikschuh *). Welchen Namen würdet ihr denn wohl einem Würfel geben, dessen Seite eine Ruthe lang wäre? K. Cubikruthe **.)

L. Dieser Name ist passend. Was mag wohl unter einer Cubikmeile zu verstehen seyn? K. Ein Würfel, dessen Seite eine Meile lang ist.

L. Den letztern Würfel muß man sich freylich nur durch Hülfe der Einbildungskraft vorstellen, da man Körper in Gestalt eines Würfels, dessen Seite = 1 Meile wäre, nicht verfertigen, also eine Cubikmeile nicht sinnlich darstellen kann. Ihr Kinder werdet euch schwerlich die richtige Vorstellung von dieser Größe machen können und ich glaube, daß ihr beym Anblikk einer sinnlich dargestellten Cubikmeile, wenn euch dieser gewährt werden könnte, ausrufen würdet: nein! so groß habe ich mir diesen Körper nicht gedacht! — — Nun sagt mir noch, was ihr euch wohl bey dem Worte Cubiklinie denkt. K. Einen kleinen Würfel, dessen Seite eine Linie lang ist.

L. Die jetzt genannten Würfel, nämlich Cubiklinie, Cubikzoll, Cubikschuh rc. sind die Maße, nach denen man die Größe der Körper (körperlichen

*) Jeder Lehrer kann sich leicht eine kleine Kiste in Form eines Würfels, dessen Seite = 1 Schuh ist, machen lassen, um, was durchaus nöthig ist, seinen Schülern durch wirkliche Anschauung eine Vorstellung von einem Cubikschuh beyzubringen.

**) Man begrenze irgendwo, wenigstens mit Stangen, den Raum von 1 Cubikruthe, damit die Kinder durch Anschauung eine Vorstellung von diesem Maße bekommen.

chen Raume) zu bestimmen pflegt. Wenn man nämlich nach der Größe eines Körpers fragt, so will man nicht etwa bloß wissen, wie hoch, oder wie breit, oder wie dikk er sey, oder wie viel Qradratschuhe etc. eine oder alle seine Flächen enthalten; sondern man will wissen, wie groß der Raum ist, welchen die Materie, woraus er besteht, ausfüllt. Und dieses Raumes Größe bestimmt man durch die Anzahl dergleichen Würfel, die ihn ausfüllen würden. Je nachdem nun dieser Raum kleiner oder größer ist, wird seine Größe entweder in Cubiklinien, oder in Cubikzollen, oder in Cubikschuhen etc. angegeben. Ihr könnt euch auch die Sache so vorstellen: Wenn ich nach der Größe eines Körpers, oder wie man auch spricht, nach dem körperlichen Inhalte eines Körpers frage; so will ich wissen, wie viel Würfel, alle von der Größe desjenigen, den ich zum Maßstabe angenommen habe, ich aus ihm (diesem Körper) machen könnte, falls er sich etwa wie Wachs behandeln und in Formen gießen ließe. Um nun eine gewisse Übereinstimmung mit dem Längenmaße zu erhalten, hat man den Seiten der Würfel, die man zu Maßstäben für Körper (körperliche Raume) gewählt hat, die Länge einer Linie, eines Zolles, eines Schuhes etc. gegeben. — Nunmehr kennt ihr drey verschiedene Arten von Maßen, nämlich das Längenmaß, das Flächenmaß, und das Körpermaß, auch Cubikmaß genannt. Da, wie ihr schon längst gelernt habt, (S. 116 d. 1 Bdchs.), der Maßstab mit der zu messenden Größe von einerley Art seyn muß, so mußte freylich das Kör-

permaß auch ein Körper seyn. Und daß man gerade den Würfel zu diesem Maße gewählt hat, kommt davon her, 1) Weil dieser Körper durchaus einerley Dikke, Länge und Breite hat, so daß man, um sich eine Vorstellung von seiner Größe machen zu könnnen, nichts als eine Seite von ihm kennen darf; 2) Weil er in die Ekken der rechtwinklichen Körper genau paßt und man also die Messung am bequemsten mit ihm verrichten kann. Ihr müßt eüch aber ja nicht vorstellen, daß die Körpermessung unmittelbar mit einem Würfel, d. h. so geschehen könne, daß man diesen etwa so wie das Längenmaß an die zu messenden Körper legte und sähe, wie oft er darin enthalten wäre. Nein! dieß geht nicht an, wie ihr eüch gleich selbst überzeügen werdet. Hier (No. 24. vorlegend) ist eine Pyramide, und hier ein Cubikzoll. Meßt nun und seht, wie oft der letztere in der erstern enthalten ist. — — Nicht wahr, ihr merkt, daß ihr durch unmittelbares Messen d. h. durch Anlegung dieses Würfels eüre Absicht nicht erreichen könnt? Denn wie ihr auch diesen Cubikzoll anlegt, so seht ihr ein, daß ihr dadurch nicht erfahren könnt, wie viel dergleichen Cubikzolle aus dieser Pyramide, wenn sie z. B. von Wachs wäre, gegossen werden könnten. Habt aber nur Geduld, ihr werdet bald lernen, wie man die Größe (den körperlichen Inhalt) eines Körpers erforschen und im Cubikmaße ausdrükken kann.

Siebenzehnter Satz.

Aufgabe.

L. (, welcher ein Rechtekk, 3 Zoll lang und 2 Zoll breit, auf einem Blatte Papier verzeichnet, vorgelegt hat.)

Wißt ihr wohl schon, wie viel von diesen Cubikzollen (No. 10.) in diesem Rechtekke welches ich die Fläche A nennen will, Platz haben oder neben einander stehen können? K. Nein.

L. Aber wie viel jede Fläche eines dieser Würfel (No. 10.) beträgt, wißt ihr! K. Ja.

L. Wie viel denn — ? K. Gerade einen Quadratzoll.

L. Wenn ihr nun wüßtet, wie viel Quadratzolle die Fläche A. hält, könntet ihr mir dann auch nicht sagen, wie viel solche Würfel ich neben einander darauf stellen könnte? K. Ja.

L. Nun, da wißt ihr ja, was ihr zu thun habt, wenn ich euch den Auftrag gebe, zu erforschen, wie viel dieser Würfel auf der Fläche A. Raum neben einander haben. Was habt ihr deßhalb zu thun? K. Wir müssen sehen, wie groß die Fläche A ist (wie viel Quadratzolle die Fläche A hält.)

L. Thut dieß. K. (messen, rechnen und finden den Flächeninhalt von A = 6 Quadratzoll.)

L. Jetzt sagt, wie viel solche Würfel neben einander auf dieser Fläche Platz haben. K. Sechs.

L. Gesetzt aber, diese Fläche hielte 8 oder 12 Quadratzoll, wie viel würden dann solche Würfel auf ihr stehen können? K. 8 oder 12.

L. Ihr seht also ein, daß auf einer größern Fläche mehr, auf einer kleinern weniger von diesen Würfeln Platz haben müssen, und daß sich die Anzahl dieser Würfel, die man auf eine Fläche nebeneinander stellen kann, genau nach der Zahl der darin enthaltenen Quadratzolle richtet.

L. Nun stellt ein Mahl sechs von diesen Würfeln auf die erwähnte Fläche A. und seht, ob sie wirklich darauf Platz haben. K. (thun dieß).

L. Wie viel von diesen Würfeln könnten denn auf den sechsen, die ihr daher (auf die Fläche A.) gestellt habt, stehen? K. Abermahls sechs.

L. Warum nicht mehr und nicht weniger? K. Weil ihre obersten Flächen zusammen genommen gerade auch sechs Quadratzoll halten.

L. Richtig! Nun stellt noch sechs von diesen Würfeln hier auf diese da (die die Fläche A einnehmen). K. (thun dieß.)

L. Nun merkt: alle die Würfel, welche neben einander auf Einer Fläche stehen, wollen wir eine Schicht nennen. Die sechs Würfel, die neben einander auf der Fläche A. stehen, machen also eine Schicht, diese sechs, die ihr da oben darauf gestellt habt, machen wieder eine Schicht. Wie viel Schichten liegen oder stehen nun jetzt hier über einander? K. Zwey.

L. Recht! dieß da (die obere Schicht abhebend und auf die untere zeigend) ist die eine, und dieß da

da (zeigend) ist die andere Schicht. Könnten wir denn wohl nicht drey solche Schichten über einander legen? K. O ja.

L. Nun so legt die dritte gar darauf. K. (thun dieß.)

L. Wie viel Schichten liegen denn jetzt über einander? K. Drey.

L. Wie viel Würfel enthält jede Schicht? K. Sechs.

L. Wie viel Würfel müssen also diese drey Schichten enthalten? K. Drey Mahl sechs oder achtzehen.

L. Gut! Würdet ihr denn die Zahl achtzehen auch haben finden können, wenn euch die Anzahl der Schichten, oder die Zahl der Würfel in einer Schicht, oder gar beydes unbekannt gewesen wäre, und ihr die Erlaubniß nicht gehabt hättet, die Würfel auseinander zu nehmen und sie einzeln zu zählen? K. Nein.

L. Was mußte euch also nothwendig bekannt seyn, damit ihr sogleich die Anzahl der hier aufeinander geschichteten Würfel finden konntet? K. Die Zahl der Würfel in jeder Schicht, und die Zahl der Schichten.

L. Nun will ich sehen, ob ihr aus diesen Angaben mir immer die Menge der Würfel bestimmen könnt, die ich mir jetzt auf einander geschichtet denke. Ich habe im Sinne einen Haufen solcher Würfel von 5 Schichten, wovon jede 8 Würfel enthält. K. Das sind so nach 40 Würfel.

L. Vier

L. Vier Schichten, jede aus 12 Würfeln bestehend machen —? K. 48 Würfel. U. s. w.

L. Das geht wie ich sehe. Nun sagt mir, was diese 18 Würfel (die gleich Anfangs in drey Schichten über einander gelegt wurden) so wie sie jetzt da liegen, zusammen genommen und vereinigt gedacht, für einen Körper bilden. K. Ein Prisma.

L. Aber was für eine Art von Prismen? K. Ein Parallelepipedum.

L. Ein schiefes oder ein senkrechtes? K. Ein senkrechtes.

L. Und was für Figuren hat es zu Grundflächen? K. Rechtekke.

L. Welche Benennung führt aber ein senkrechtes Parallelepipedum, welches Rechtekke zu Grundflächen hat? K. Die Benennung rechtwinkeliges Parallelepipedum.

L. Wenn ich nun spräche: dieß ist ein rechtwinkeliges Parallelepipedum, welches aus mehrern auf einander stehenden Schichten von Würfeln besteht, behauptete ich da etwas Wahres oder etwas Falsches. K. Etwas Wahres.

L. Nun so sagt mir diesen Satz nach. K. (wiederholen.)

L. Jetzt merkt, was ich sage. Jedes rechtwinkelige Parallelepipedum können wir uns denken, als zusammen gesetzt (bestehend) aus mehrern übereinander liegenden Schichten von Würfeln. So kann ich mir z. B. vorstellen, als wäre dieses Parallelepipedum (die 3 Stükke No. 8. A B². so auf-

einander stellend, daß dadurch ein 6 Zoll hohes und 1 Zoll dikkes Parallelepipedum gebildet wird) das ich jetzt immer A nennen will, aus lauter Würfeln, die Schichtenweise aufeinander liegen, zusammen gesetzt. Wenn ich nun wüßte, 1) wie viel Würfel in einer Schicht sich befinden, und 2) wie viel dergleichen Schichten übereinander liegen, könnte ich da nicht die Anzahl aller Würfel, woraus dieser ganze (vor den Augen der Kinder stehende) Körper zusammengesetzt gedacht wird, leicht finden? K. O ja.

L. Wie denn? K. Wenn Sie die Zahl der Würfel in einer Schicht mit der Zahl der Schichten multiplicirten.

L. Und wenn wir dieß gethan hätten und uns noch die Seite der Würfel bekannt wäre, wäre uns denn die Größe (der körperliche Inhalt) des Parallelepipedums A noch unbekannt? K. Nein.

L. Um also zu erfahren, wie groß dieser Körper ist, müssen wir sehen, aus wie viel Schichten von gleichen Würfeln, deren Seite bekannt seyn muß, er besteht, und wie viel solche Würfel in jeder Schicht vorhanden sind. Die erste oder unterste Schicht muß natürlich auf der Grundfläche dieses Körpers, die diesem Rechtekke (No. 8. C vorlegend) gleich und ähnlich ist, gedacht werden. Was meynt ihr, daß zu thun sey, um zu erfahren, wie viel etwa von unsern Cubikzollen auf diesem (erst vorlegten) Rechtekke Platz haben? K. Wir müssen seinen Flächeninhalt suchen.

L. Sucht ihn. K. (thun dieß und sagen:) Es hält zwey Quadratzoll. Also hält auch die

Grund-

Grundfläche dieses Körpers (A) 2 Quadratzoll. Denn die erwähnte Fläche und das hier verzeichnete Rechtekk dekken ja einander, wie ihr gehört habt.

L. Wie viel von unsern Würfeln können also auf diesem hier (No. 8 C) verzeichneten Rechtekke, oder, welches einerley ist, auf der Grundfläche dieses Körpers (A) Platz haben? K. Zwey.

L. Auf der Grundfläche dieses Parallelepipedums müßt ihr eüch also jetzt zwey solche Würfel stehend denken, oder eüch vorstellen, daß die unterste Schicht zwey solche Würfel enthalte. Gesetzt nun, dieser Körper (A) wäre gerade drey Zoll hoch, wie viel solche Schichten müßten denn da übereinander stehen? K. Drey.

L. Und wenn er vier Zoll hoch wäre? K. Dann müßten vier Schichten da stehen.

L. Nun könnt ihr mir wohl sagen, was ihr an diesem Körper nur messen dürft, um zu erfahren, wie viel Schichten von solchen Würfeln (No. 10.) in ihm über einander gedacht werden müssen. K. Seine Höhe.

L. Freylich! Meßt sie. K. (thun dieß und finden sie = 6 Zoll.)

L. Also sechs Zoll hoch ist dieser Körper. Wie viel Schichten von unsern Würfeln müßt ihr eüch also in ihm übereinander denken? K. Sechs.

L. Warum nicht mehr und nicht weniger? K. Weil jeder solche Würfel gerade einen Zoll hoch ist, und die Höhe dieses Körpers 6 Zoll hält.

L. Da

L. Da nun in jeder dieser sechs, jetzt von euch gedachten, Schichten 2 Würfel enthalten sind, so macht dieß — ? K. Zwölf.

L. Richtig! Ihr habt jetzt herausgebracht, wie viel Cubikzolle dieser Körper enthält, habt also seine Größe (seinen körperlichen Inhalt) gefunden. Wie habt ihr nun diese (diesen) gefunden? Durch Messungen oder durch Rechnungen? K. Durch beydes zugleich.

L. Was haben wir denn zuerst ausgemessen? K. Die Grundlinie und Höhe des Rechtekks, welches diesem Körper zur Grundfläche dient.

L. Und was haben wir daraus berechnet? K. Den Flächeninhalt des erwähnten Rechtekks.

L. Wir haben also vor allem die Größe der Grundfläche dieses Parallelepipedums gesucht. Was haben wir denn nachher an diesem Körper gemessen? K. Seine Höhe.

L. Was haben wir mit der Zahl, die seine Höhe anzeigte, nämlich mit der Zahl 6, und mit der Zahl, die die Größe seiner Grundfläche angab, nämlich mit der Zahl 2, gethan? K. Wir haben beyde mit einander multiplicirt.

L. Das können wir kurz also ausdrükken: Wir haben die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt, welches aber eben so viel ist, als wenn wir sprächen: wir haben die Zahl der Würfel in einer Schicht mit der Zahl der über einander liegenden Schichten multiplicirt. Denn die Zahl, die uns die Größe der Grundfläche angab, be-

bestimmte ja auch die Menge der Würfel in einer Schicht, und die Zahl, die die Höhe ausdrükkte, bestimmte zugleich die Menge der übereinander liegenden Schichten. — Ich will nun sehen, ob ihr jetzt die Größe oder den körperlichen Inhalt des Parallelepipedums, das ich da bilde (mit 6 Stükken von No. 8. ein rechtwinkliges Parallelepipedum 2 Zoll dikk (breit), 4 Zoll lang, und 3 Zoll hoch bildend), finden könnt. Was müßt ihr vor allen Dingen ausmessen? K. Die Grundlinie und Höhe seiner Grundfläche.

L. Und warum dieß? K. Damit wir die Größe der Grundfläche finden können.

L. Nun so meßt und sucht die Größe dieser Fläche. K. (thun dieß).

L. Dieses Körpes Grundfläche hält also — ? K. Acht Quadratzoll.

L. Jetzt wißt ihr, wie viel von unsern Würfeln da darauf stehen können, nämlich — ? K. Acht.

L. Eine Schicht von den hier auf einander stehenden Würfeln enthält also ihrer acht. Was müßt ihr jetzt messen um zu erfahren, wie viel solche Schichten über einander liegen? K. Die Höhe dieses Parallelepipedums.

L. Meßt sie. K. (messen).

L. Jetzt ist euch die Höhe und Grundfläche dieses Parallelepipedums bekannt. Was ist nun noch zu thun, um seinen ganzen körperlichen Inhalt zu finden? K. Wir müssen die Höhe mit der Grundfläche multipliciren.

L. Thut dieß und sagt mir das Product. K. 24.

L. Das

L. Das heißt: dieser Körper enthält 24 Cubikzoll, oder 24 Cubikzoll füllen den nämlichen Raum aus, den er ausfüllt. Daher kann ich auch mit diesen 24 Cubikzollen No 10 und 11. gerade einen solchen Körper bilden, wie der ist, den ihr erst ausgemessen und ausgerechnet habt. — Seht ihrs? — Ihr habt jetzt eine gewisse Aufgabe aufgelöst: wer sagt mir wohl, wie sie lauten muß? K. Die Größe (den körperlichen Inhalt) eines rechtwinkeligen Parallelepipedums zu finden.

L. Wer kann mir denn aber auch die Art und Weise beschreiben, wie man diese Aufgabe auflöst? K. Man muß die Grundlinie und Höhe (ein Paar an einander liegende Seiten) seiner Grundfläche messen und daraus den Inhalt derselben bestimmen. Hierauf muß man auch die Höhe des Körpers messen und damit die Grudfläche multipliciren.

L. Gut! Hiebey merkt noch Folgendes: 1) Die Grundlinie und Höhe der Grundfläche eines Parallelepipedums können wir auch seine Länge und Breite oder seine Länge und Dikke nennen, und daher auch sagen: um den körperlichen Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums zu finden, dürfen wir nur seine Länge, Breite (Dikke) und Höhe suchen und diese drey Ausdehnungen mit einander multipliciren.

2) Diese drey Ausdehnungen müssen allemal in einerley Maßtheilen, d. h. entweder in Linien, oder in Zollen, oder in Schuhen &c. angegeben seyn.

3) Die

3) Die Maßtheile, in welchen die Größe der erwähnten Ausdehnungen ausgedrükkt sind, sind auch die Seiten der Würfel, deren Anzahl das Product aus diesen Ausdehnungen bestimmt. Hieße es z. B. dieses oder jenes Parallelepipedum ist 9 Linien lang, 5 Linien breit, 2 Linien hoch; so zeigte das Product 90. lauter Cubiklinien (Würfel) deren Seite = 1 Linie wäre,) an, und hätten wir statt Linien Zolle, oder Schuhe, so erhielten wir im Producte Cubikzolle, oder Cubikschuhe.

Achtzehnter Satz.

Zusatz *a*.

L. Da ihr wißt, daß ein Würfel nichts anders ist, als ein rechtwinkeliges Parallelepipedum, das sich von den übrigen Körpern dieser Art nur dadurch unterscheidet, daß es von sechs gleichen Quadraten begrenzt wird, also einerley Dikke, Breite und Höhe hat; so werdet ihr mir wohl gleich sagen können, wie man den körperlichen Inhalt (die Größe) eines Würfels findet. Wer sagt mir, wie? K. Man muß seine Grundfläche mit seiner Höhe (seine Dikke, Breite und Höhe) mit einander multipliciren!

L. Gut! Hier (No. 8. B³. vorlegend) habe ich einen Würfel.. Gesetzt nun, ich hätte hier diese Linie (zeigend) die wir seine Breite oder die Grundlinie seiner Grundfläche nennen wollen, gemessen, hätte

hätte ich denn da wohl noch nöthig, auch seine Dikke (die Höhe seiner Grundfläche) und auch seine Höhe zu messen? K. Nein.

L. Aber warum nicht? K. Weil diese beyden Ausdehnungen mit der ersten einerley Größe haben.

L. Wenn ich also ein Mahl weiß, wie breit ein Würfel ist so weiß ich auch — K. Wie dikk und hoch er ist.

L. Oder: wenn ich eine von den drey Ausdehnungen eines Würfels weiß, so weiß ich auch — ? K. Die übrigen beyden *).

L. Meßt doch ein Mahl die Breite (eine von den 3 Ausdehnungen) dieses Würfels. K. (thun dieß.)

L. Nun wie viel beträgt sie? K. Zwey Zoll.

L. Was für Zahlen habt ihr nun mit einander zu multipliciren, wenn ihr den Inhalt der Grundfläche dieses Würfels finden, oder: wenn ihr die Dikke und Breite dieses Würfels mit einander multipliciren wollt? K. Die Zahlen 2 und 2.

L. Und mit welcher Zahl muß denn das dadurch entstandene Product 4 multiplicirt werden, wenn ich es mit der Höhe dieses Würfels multipliciren will? K. Auch mit 2.

L. Welche Zahl erhalten wir dadurch zum Producte? K. Die Zahl 8.

L. Und

*) Man halte dieß nicht für unnöthige Wiederholung. Denn Kinder müssen gar oft wieder auf die nämliche Wahrheit zurükgeführt werden, wenn sie mit ihr recht vertraut werden sollen.

L. Und das ist die Zahl der acht kleinern Würfel, woraus dieser größere besteht. Wie lang ist nun die Seite dieser kleinern Würfel? K. Einen Zoll.

L. Woher wißt ihr dieß? K. Daher, weil die 3 Ausdehnungen dieses Würfels in Zollen angegeben waren.

L. Wie viel Cubikzoll enthält also dieser Würfel. K. Acht.

L. Richtig! daher kann ich wie ihr seht, aus diesen Acht Cubikzollen (von No. 10.) gerade einen solchen Würfel No. 8. B.³ zusammen setzen.

Nun merkt wieder einen besondern Ausdrukk. Die Zahl Acht heißt hier die Cubikzahl. So nennt man nämlich jedes Product, welches aus drey gleichen Factoren entsteht, wovon jeder die Wurzel genannt wird. Zwey z. B. ist die Wurzel von der Cubikzahl — acht, und acht ist die Cubikzahl von der Wurzel zwey; 27 ist die Cubikzahl von 3, und 3 ist die Wurzel von der Cubikzahl 27. Denn wenn wir diese drey gleichen Factoren (3. 3. 3. anschreibend) mit einander multipliciren, indem wir sprechen: 3 Mahl 3 ist 9, und 3 Mahl 9 ist 27; so erhalten wir ja die gedachte Zahl. Ich will nun sehen, ob ihr mir geschwind die Cubikzahl von 4 angeben könnt. K. Diese ist 64.

L. Sagt laut, wie ihr bey euch gedacht habt, um diese Zahl zu finden. K. Wir haben gedacht: 4 Mahl 4 ist 16, und 4 Mahl 16 ist 64.

L. Welche Zahl ist denn die Wurzel von der Cubikzahl 64? K. Die Zahl 4.

L. Nun sucht mir die Cubikzahl von 5.

Man lasse hier die Cubikzahlen von 6 bis 10 oder 12 gar suchen.

L. Wer sagt mir wohl jetzt, was man unter dem Worte Cubikzahl versteht? K. Ein jedes Product, welches aus drey gleichen Factoren entstanden ist.

L. Der Grund, warum ein solches Produkt die gedachte Benennung bekommen hat, ist, weil es allemal den körperlichen Inhalt eines Würfels, der, wie ihr wißt, auch Cubus heißt, angiebt, dessen Seite so viel Linien, oder Schuhe 2c. mißt, als einer der drey gleichen Factoren (die Wurzel) Einheiten in sich hält. — Jetzt werdet ihr mich verstehen, wenn ich sage: um den körperlichen Inhalt eines Würfels zu finden, darf man nur die Cubikzahl seiner Seite suchen. Indem wir aber diese Zahl suchen, thun wir nichts anders, als daß wir die Breite, Dikke und Höhe des Würfels mit einander multipliciren. Denn der eine der 3 gleichen Factoren zeigt die Dikke, der andere die Breite, der dritte die Höhe an. Suche die Cubikzahl seiner (eines Würfels) Seite, ist nur ein kürzerer Ausdrukk, als der: multiplicire seine Breite, Dikke und Höhe mit einander. (Nachdem mit den 8 Stükken von No. 8. ein Würfel gebildet worden ist.) Jetzt sucht mir die Seite des Würfels, den ich erst da gebildet habe, und sagt, wie lang sie ist? K. Diese ist 3 Zoll.

L. Wie

L. Wie kann ich nun ganz kurz sprechen, wenn ich jemanden sagen will, was er thun muß, wenn er den körperlichen Inhalt dieses Würfels suchen soll. K. Du mußt die Cubikzahl seiner Seite suchen.

L. Gut! Nun sucht diese Zahl. K. Diese ist 27.

L. Was zeigt euch diese Zahl hier an? K. Aus wie viel kleinern Würfeln dieser größere besteht.

L. Und wie lang ist die Seite dieser kleinern Würfel? K. Einen Zoll.

L. Freylich! Denn in Zollen habt ihr ja die Seite des größern Würfels angegeben. Wie viel Cubikzolle muß also dieser größere Würfel enthalten? K. 27.

L. Nun will ich euch zeigen, daß er deren wirklich so viel enthält. Dieses Stükk (B^3) enthält wie ihr vorhin gesehen habt, 8, jedes von diesen 3 (mit $A^2 B$ bezeichneten) Stükken 2, und jedes von diesen Stükken ($A B^2$) 4, dieses Stükk aber (A^3) 1 Cubikzoll. 8 und 3 Mahl 4 macht aber 20, dazu noch 3 Mahl 2 macht 26, und 1 ist 27. Daß aber ein solches Stükk ($A^2 B$) vier und ein solches ($A B^2$) zwey Cubikzoll in sich faßen müße, seht ihr daraus, daß ich mit 4 solchen Würfeln (No. 10.) das Stükk $A^2 B$, und mit zweyen das Stükk $A B^2$ bilden kann. Und wenn ich diese 16 (No. 10.) und diese 8 (No. 11) Würfel, verbunden mit diesen zwey Stükken (No. 8 A^3 und $A^2 B$) also gerade 27 Cubikzolle, gehörig zusammen setze; so bekomme ich ebenfalls einen Würfel, dessen Seite = 3 Zoll ist. — Seht da ist er! — — Ihr wißt, daß nach der Decimal-Eintheilung

der

der Zoll 10 Linien hat, und könnt mir daher ausrechnen, wie viel Cubiklinien auf einen Cubikzoll gehen. Thut dieß, aber rechnet laut. K. Die Seite des Cubikzolles hält 10 Linien, 10 Mahl 10 ist 100, 10 Mahl 100 ist 1000.

L. Also tausend kleine Würfelchen, deren Seite = 1 Linie ist, sind in einem solchen Würfel da (No. 10.) enthalten. Diese Wahrheit merkt recht. Nun seht doch, wie viel solche Würfel (von No. 10.) also Cubikzolle in diesem größern da, dem Cubikschuh enthalten sind. Behaltet auch hier die Decimal-Eintheilung bey, und rechnet abermals laut. K. Die Seite des Cubikschuhes enthält 10 Zoll. 10 Mahl 10 ist aber 100, und 10 Mahl 100 ist 1000.

L. Tausend solche Würfel (von No. 10.) müßte ich also zusammen setzen, wenn ich daraus einen solchen (auf den bereit stehenden Cubikschuh zeigend) bilden wollte. Nun rechnet auch noch aus, wie viel Cubikschuhe in einer Cubikruthe enthalten sind. K. Auch 1000.

L. Wenn ich nun eine gewisse Anzahl Cubiklinien in Cubikzolle verwandeln wollte, mit welcher Zahl müßte ich da die Zahl der Cubiklinien dividiren? K. Mit 1000.

L. Und wenn ich Cubikzolle in Cubikschuhe verwandeln wollte, mit welcher Zahl müßte ich da dividiren? K. Auch mit 1000.

L. Und diese Zahl müßte auch der Divisor seyn, wenn ich Cubikruthen aus Cubikschuhen machen wollte. Da man nun, wenn eine Zahl mit

1000 dividirt werden soll, nur drey Stellen davon abschneiden darf, so ist es sehr leicht, eine gewisse Anzahl Cubiklinien in Cubikzolle, diese in Cubikschuhe und diese wieder in Cubikruthen zu verwandeln, wenn man nämlich die Decimaleintheilung zu Grunde legt. Folgende Anzahl von Cubiklinien z. B. $58134768952 4^{c'''}$ darf ich nur also abtheilen und bezeichnen: $581,^{co}$ $347,^{c'}$ $689,^{c''}$ $524^{c'''}$, wenn ich Cubikruthen, Cubikschuhe, Cubikzolle und Cubiklinien daraus machen will. Das kleine c, welches ich oben vor die Zeichen der Ruthen, Schuhe ꝛc. gesetzt habe, bedeutet Cubik, und das Ganze wird also gelesen: 581 Cubikruthen, 347 Cubikschuhe, 689 Cubikzolle und 524 Cubiklinien.

> Man gebe hier den Kindern ähnliche große Summen von Cubiklinien und lasse sie solche auf die jetzt gezeigte Art in Cubikzolle ꝛc. verwandeln, die Zeichen der Maße an die gehörige Stelle schreiben und dann das Ganze, wie sichs gebührt, aussprechen. Alsdann lasse man auch ausrechnen, wie viel Cubiklinien auf einen Cubikzoll u. s. w. geben, wenn man die Duodecimal-Eintheilung zu Grunde legt. Ist dieß geschehen, so zeige man, wie man das Decimal-Cubikmaß auf das Duodecimal-Cubikmaß, und umgekehrt, dieses auf jenes bringt.

Die Operation selbst ist leicht, wenn man folgende Reduktionssätze merkt:

1) Bey einerley Ruthenmaße sind

1000 Decimal-Cubikfuß = 1728 Duodecimal-Cubikfuß;

2) Bey einerley Fußmaß sind
1000 Decimal-Cubikzoll = 1728 Duodecimal-Cubikzoll.

Beyspiele:

1) 50 c′ 200 c″ Decimal sollen aufs Duodecimal-Maß gebracht werden.

Ansatz:

```
Dec. Cubf.   Duod. Cubf.      Dec. Cf.   Dec. Cubikz.
1000 —       1728. —          50.        200.
     1000        50200        1000
---------    ---------        ---------
1000000      345600           50200 Dec. Cbikz.
            8640
10000ØØ)  8674560Ø | 86 Duodec. Cbf.
           80000
           -----
           67456
           -----
           60000
           -----
            7456 *)
            1728
           -----
           59648
          14912
         52192
        7456
   --------------
10000) 1288|3968 | 1288 Cbikz. im Duodecimalmaße.
```


*) Zu dem Quotienten 86 gehört noch der Bruch $\frac{7456}{10000}$ eines Duodecimal-Cubikfußes. Dieser Bruch wird nun in Zolle aufgelöst, indem sein Zähler mit 1728 (der Anzahl der Zolle eines Duodecimal-Cubikfußes) multiplicirt und darauf mit seinem Nenner dividirt wird.

3968 *)
1728

31744
7936
27776
3968

10000|6856|704 | 685 Duodec.-Cubiklinien.

6704 **)
1728

53632
13408
46928
6704

10000|1158|4512 | $1158\frac{4512}{10000}$ Cubikscrupel im Duodec. Maße.

2) Wie viel betragen 80 c′ 4000 c″ des Duodecimal-Maßes im Decimal-Maße?

Ansatz:

Duodec. Cbf.	Dec-Cbf.	Duodec. Cbf.	Duod. Cbz.
1728 —	1000 —	80	400.

1728
1728

13824
3456
12096
1728

2985984 Zolle

80
1728

138240
400

138640 Duodec. Cbzolle.
1000

2985984 | 138640000 | 46 Dec. Cbf.
11943936

19200640
17915904

1284736

*) Nun wird der Zollbruch in Linien verwandelt.

**) Der Cubiklinien-Bruch wird jetzt in Cubikscrupel aufgelöst.

1284736
1000 *)

2985984 | 1284736000 | 430 Dec. Cubikzoll.
11943936

11 9034240
8957952

15762880 **)
1000

762880000 | 2'
5971968

16568320
14929920

1 16384000
14929920

1454080
1000

2985984 | 1454080000 | 486 Dec. Cubikscrupel
11943936

25968640
23887872

— 20806680
17015904

— 2891776

L. Nun

*) Der Decimal-Cubikfuß-Bruch wird in Decimal-Cubikzolle aufgelöst.

**) Der Decimal-Cubikzoll-Bruch wird in Decimal-Cubiklinien aufgelöst.

L. Nun wollen wir uns ein bischen üben im Auffinden des körperlichen Inhalts gegebener rechtwinkliger Parallelepipeden. Da, wie ihr wißt, jede Mauer ein dergleichen Körper ist, so wollen wir den Anfang mit einer der Mauern unsers Lehrzimmers machen. Die Aufgabe ist also: Den körperlichen Inhalt dieser Wand hier (eine zeigend) zu finden.

Ein Kind mißt nun die Länge, Dikke und Höhe der bestimmten Wand, und alle berechnen aus den gefundenen Zahlen den körperlichen Inhalt derselben. Gesetzt, die Wand wäre 8 Schuh u. 9 Zoll lang, 8 Zoll dikk, und 9 Schuh hoch;

so entstünde folgende Rechnung, wo alle drey Dimensionen in Zollen ausgedrükkt seyn müßten

89'' Länge
8'' Dikke
712□'' Inhalt der Grundfläche.
90'' Höhe
64080 = 64c' 80c'' körperlicher Inhalt.

Auf gleiche Weise werden noch folgende und ähnliche Aufgaben aufgelöst:

1) Wie viel beträgt der körperliche Inhalt unsers viereckigen Tischblattes? *)

2) Wie

*) Die Kinder messen hier die Länge, Breite und Dicke des gegebenen Tischblattes.

2) Wie viel Cubikschuhe hält der Raum unseres Lehrzimmers? *)

3) Wie viel Raum ist in einer Kiste, die im Lichten (ohne die Breter-Dikke) 4 Schuh und 6 Zoll in der Länge, 2 Schuh und 3 Zoll in der Breite, und 3 Schuh in der Höhe hält?

4) Wie groß ist der Raum eines Grabens, der 2 Schuh breit, 1 1/2 Schuh tief und 264 Schuh lang ist?

5) Wie viel beträgt der körperliche Inhalt eines Quadersteins, welcher 1 Schuh dikk, 2 Schuh lang und 1 1/2 Schuh hoch ist?

6) Wie viel beträgt der von den vier Wänden, von dem Boden und dem Fußboden begrenzte Raum einer Scheune, welche 45 Schuh lang, 30 Schuh breit, und bis an das Dach 14 Schuh hoch ist?

7) Wie viel Cubikschuh Holz enthält eine Säule, welche 10 Schuh hoch, 1 Schuh und 2 Zoll dikk und eben so breit ist?

8) Wie viel Cubikschuh hält eine Mauer, die 72 Schuh lang, 1 Schuh 5 Zoll dikk, und 8 Schuh hoch ist?

Wenn

*) Die Kinder messen hier abermals die Länge, Breite und Höhe ihres Lehrzimmers. Haben sie die vorgelegte Aufgabe aufgelöst und betrüge der Raum des Zimmers z. B. 864 Cubikschuhe; so spreche man: also 864 solche Kistchen (auf den vorliegenden Cubikschuh zeigend) hätten in diesem Zimmer Platz, wenn sie nämlich — was freilich nicht möglich ist — so dicht neben und auf einander gestellt werden könnten, daß gar kein Raum zwischen ihnen bliebe. — Durch solche Erläuterungen wird es den Kindern erst recht deutlich, was es heißt, wenn man spricht: dieß Zimmer rc. hält so oder so viel Cubikschuh.

Wenn die Kinder dergleichen Exempel sowohl im Decimal- als Duodecimalmaß ganz fertig ausrechnen können, dann zeige man ihnen an folgenden und ähnlichen Beyspielen, wozu diese Geschikklichkeit im gemeinen Leben dient.

D) Ein Maurer soll einen Ueberschlag machen und sagen, wie viel Bakksteine zum Ausmauern einer Riegelwand, welche 8 Schuh hoch, 36 Schuh lang und 1/2 Schuh (5 Zoll) dikk werden soll, erforderlich sind.

In diesem Falle muß gesucht werden

1) der körperliche Inhalt der ganzen Wand;

2) der körperliche Inhalt aller Balken (Riegel), die mit in die Wand kommen;

3) der körperliche Inhalt eines Bakksteins. Hierauf muß

4) der Inhalt der Balken von dem Inhalte der Wand abgezogen, und

5) der hierdurch gefundene Rest mit dem körperlichen Inhalte eines Bakksteins dividirt werden, wo dann der Quotient die gesuchte Anzahl der Bakksteine angiebt, weil gerade so oft ein Bakkstein nöthig ist, als der körperliche Inhalt eines solchen in dem körperlichen Inhalt der Wand ohne Balken enthalten ist.

Die Rechnung selbst wäre, wenn die Balken und Bakksteine die von mir angenommene Größe hätten, folgende:

360″ Länge der Wand.
5″ Dikke — —

1800 □″ Inhalt der Grundfläche
80″ Höhe

144000 c″ = 144 c′ körperlicher Inhalt der ganzen Wand.

5″

5'' Breite der Balken.
8'' Dikke — —

40
1880'' Länge aller Balken zusammen genommen.

3200
320
40

75200 c'' = 75 c', 200 c'' körperlicher Inhalt der Balken.

11'' Länge eines Bakksteins.
5'' Breite — —

55
3'' Dikke

165 c'' körperlicher Inhalt eines Bakksteins.

144000 c'' körperlicher Inhalt der Wand.
75200 c'' körperlicher Inhalt der Balken.

Rest 68800 c''

165 | 68800 | $416\frac{160}{165}$ gesuchte Zahl der Bakksteine.
660
1280
165
1150
990
160

NB. Bey dieser Rechnung ist der Mörtel nicht mit in Anschlag gebracht, und die Wand ohne Thüren und Fenster angenommen.

II) Ein

II) Ein Maurer soll berechnen, wie viel Fuder Steine (sogenannte Brokkensteine und keine Quader) er zu einer Mauer braucht, welche 48 Schuh lang, 10 Schuh hoch und 1 Schuh 5 Zoll dikk werden soll. Es wird hierbey angenommen, daß ein Fuder Steine 4 1/2 Cubikschuh giebt.

Die Berechnung ist folgende:

480″ Länge der Mauer
15″ Dikke — —

2400
480

7200 □″ Grundfläche der Mauer.
100″ Höhe.

720000 c″ = 720 c′ körperlicher Inhalt.

So oft nun in diesem Produkte 4 1/2 c′ = 4500 c″ enthalten sind, so oft ist ein Fuder Steine nöthig, daher folgende Rechnung:

45~~00~~ | 7200~~00~~ | 160 Fuder
45
270
270
: : : 0

III) Jemand will einen Graben führen lassen, der 88′ lang, 2′ tief, 1 1/2′ oder 15″ breit ist. Für jeden Cubikschuh erhält der Arbeiter 2 kr. Die Frage ist: wie viel kostet dieser Graben an Arbeitslohn?

Berechnung:

880" Länge des Grabens.
15" Breite — —

4400
880

13200 □" Grundfläche.
20" Tiefe (Höhe).

264000 c" = 264 c' körperlicher Inhalt.

1 c' — 2 kr. — 264 c' (Ein Cubiksch. kostet 2 kr.
2 was kosten 264 Cubiksch.?)

60 | 528 | 8 fl. 48 kr.
480

48

Zusatz *b.*

L. (welcher sowol auf der Grunfläche A B C D Fig. 22. als auch auf der Grundfläche A B C D Fig. 24. mit Würfeln und Prismen von No. 10. und 11. ein 2 Zoll hohes Parallelepipedum errichtet hat.) Hier habe ich zwey Parallelepipeda gebildet, zwischen welchen ein gewisser Unterschied Statt findet. Wer giebt mir diesen an? K. Dieses da (zeigend) ist rechtwinkelig, dieses aber (zeigend) steht auf einer schiefwinkeligen Grundfläche.

L. Gut! Um uns kurz ausdrücken zu können, wollen wir das rechtwinkelige A, und das auf der schiefwinkeligen Grundfläche errichtete B nennen. Jetzt zählt die Quadratzolle zusammen,

worein die Grundfläche von A eingetheilt ist. K. Das sind ihrer sechs.

L. Und wie viel Quadratzolle hält die Grundfläche von B? K. Vier ganze und vier halbe, also auch sechs.

L. Wie verhalten sich demnach die Grundflächen dieser beyden Körper zu einander? K. Sie sind einander gleich.

L. Aber wie verhalten sich beyder Höhen zu einander? K. Auch diese sind einander gleich, denn jeder dieser Körper ist ja zwey Zoll hoch.

L. Welches von diesen zwey Parallelepipeden muß nun wohl das größere seyn? K. Es ist keines größer als das andere.

L. Ihr habt Recht, sie sind einander gleich. Aber nach welchem unserer Sätze könntet ihr dieses gleich wissen? K. Nach dem: Alle Prismen ꝛc. (S. 42.)

L. Gesetzt nun, ich hätte den körperlichen Inhalt von A gefunden, wäre mir dann der körperliche Inhalt von B noch unbekannt? K. Nein.

L. Was dürftet ihr demnach nur thun, wenn ich euch den Auftrag gäbe, mir den körperlichen Inhalt von B zu suchen, ohne euch gleichwohl zu sagen, wie man ein schiefwinkliges Parallelepipedum ausrechnet? K. Da dürften wir nur den körperlichen Inhalt von A suchen.

L. Aber dadurch würde euch ja nur die Größe von A, aber nicht die von B bekannt? K. Doch auch von B, da A und B einander gleich sind.

L. Ihr

L. Ihr habt Recht! Da nun jedes auf einer schiefwinkligen Grundfläche stehende Parallelepipedum gleich ist einem rechtwinkeligen, das mit ihm (dem auf der schiefwinkeligen Grundfläche stehenden) gleiche Grundfläche und Höhe hat (S. 42.); so könnt ihr vielleicht sagen, wie man überhaupt den körperlichen Inhalt eines auf einer schiefwinkeligen Grundfläche stehenden Parallelepipedums findet. K. Diesen findet man, indem man den körperlichen Inhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipedums sucht, welches mit dem auf der schiefwinkeligen Grundfläche stehenden gleiche Grundfläche und Höhe hat.

L. Aber wie erfahre ich, wie groß die Grundfläche und Höhe desjenigen rechtwinkeligen Parallelepipedums ist, welches ich berechnen muß, wenn ich den Inhalt eines mir gegebenen Körpers dieses Namens, dessen Grundfläche aber schiefwinkelig ist, finden soll? K. Da suche ich die Grundfläche und Höhe des mir gegebenen Parallelepipedums.

L. Und wenn man diese gefunden hat? K. Dann multiplicirt man beyde mit einander.

L. Demnach verfährt man bey der Ausrechnung eines Parallelepipedums, dessen Grundfläche schiefwinkelig ist, gerade so, wie bey der Ausrechnung eines rechtwinkeligen Körpers dieser Art. In beyden Fällen wird der körperliche Inhalt gefunden, wenn man multiplicirt? K. Die Grundfläche mit der Höhe. —

L. Ihr könnt euch auch die Sache auf eine kürzere Art folgendermassen vorstellen. Wenn wir

dieses

dieses dreyekkige Prisma hier wegnehmen (das auf A F D Fig. 24. stehende dreyekkige Prisma hierüber auf B E C setzend) und es so daher (auf B E C) stellen, so erhalten wir ein rechtwinkeliges Parallelepipedum, dessen Grundfläche die nämliche Grundlinie und Höhe hat, welche die Grundfläche des zuerst dagestandenen und nun verwandelten Parallelepipedums hatte. Auf die nämliche Art können wir, in Gedanken wenigstens, jedes auf einer schiefwinkeligen Grundfläche stehende Parallelepipedum in ein rechtwinkeliges, ohne die Größe seiner Grundfläche und Höhe zu verändern, verwandeln und es daher auch als ein solches bey der Ausrechnung seines körperlichen Inhalts behandeln. — Jetzt sucht ein Mahl den körperlichen Inhalt dieses (das vorhin auf A B C D Fig. 24. gestandene Parallelepipedum wieder herstellend) Parallelepipedums, auf die gehörige Weise. Was müßt ihr da zuerst messen? K. Die Grundlinie seiner Grundfläche (seine Länge).

L. Da diese schon in Zolle abgetheilt ist, so könnt ihr gleich sagen, wie lang sie ist. K. Sie ist drey Zoll lang.

L. Was müßt ihr jetzt messen? K. Die Höhe der Grundfläche oder die Breite des ganzen Körpers.

L. Welche Linie zeigt die Höhe an? Zeigt mir sie. K. (Zeigen F A oder C G.)

L. Wie lang ist diese Linie? K. Zwey Zoll.

L. Wie groß ist demnach die Grundfläche dieses Körpers? K. Sechs Quadratzoll.

L. Was

L. Was für eine Ausdehnung ist jetzt noch zu messen? K. Die Höhe des Körpers.

L. Wie viel beträgt diese? K. Auch zwey Zoll.

L. Die Höhe mit der Grundfläche multiplicirt giebt — ? K. Zwölf.

L. So viel Cubikzoll muß demnach dieses, auf einer schiefwinkeligen Grundfläche stehende, Parallelepipedum enthalten. Zerlegt es jetzt und seht, ob ihr diese Anzahl von Cubikzollen herausbringt. K. (thun dieß und finden, indem sie die darin enthaltenen dreyseitigen Prismen (von No. 11) gehörig an einander legen, wirklich die zwölf Cubikzoll.)

Nun errichte man noch nach und nach

1) auf der Grundfläche I H K D Fig. 24. ein 2 Zoll hohes
2) auf der Grundfläche A L F D Fig. 24. ein 3 Zoll hohes
3) auf der Grundfläche A B C D Fig. 24. ein 4 Zoll hohes

Parallelepipedum und lasse den Inhalt eines jeden dieser Körper auf die vorher angegebene Art erst durch Rechnung, dann durch Zerlegung in Cubikzolle finden.

Neunzehnter Satz.

Zusatz *c.*

L. (, welcher mit Stükken von No. 10. und 11. auf der Grundfläche A B C Fig. 17. ein drey-

seiti-

seitiges drey Zoll hohes Prisma und auf der Grundfläche A e f g Fig. 22. ein eben so hohes Parallelepipedum errichtet hat.) Was ist denn wohl dieses hier (auf das dreyseitige Prisma zeigend) für ein Körper? K. Ein dreyseitiges Prisma.

L. Wie viel Quadratzolle begreift denn die Grundfläche dieses dreyseitigen Prismas in sich? K. Zwey.

L. Und die des Parallelepipedums? K. Auch so viel.

L. Und wie hoch ist jeder dieser Körper? K. Drey Zoll.

L. Da haben wir also hier (zeigend) ein rechtwinkeliges Parallelepipedum, welches mit diesem Prisma gleiche Grundfläche und Höhe hat. Wie müssen sich demnach beyde Körper zu einander verhalten? K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Richtig! denn beyde sind ja Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen. Wenn ihr nun den körperlichen Inhalt dieses dreyseitigen Prismas gern finden möchtet, und dagegen dieses Parallelepipedum ausrechnetet, würdet ihr wohl da euren Zwekk erreichen oder nicht? K. Wir würden ihn erreichen.

L. Welches Körpers Größe würdet ihr also zugleich mit erfahren, wenn ihr die Größe dieses Parallelepipedums fändet? K. Die Größe dieses dreyseitigen Prismas.

L. Da nun jedes dreyseitige Prisma gleich ist einem rechtwinkeligen Parallelepipedum, welches mit ihm

ihm (dem dreyseitigen Prisma) gleiche Grundfläche und Höhe hat; so könnt ihr mir wohl sagen, was für einen Körper man nur ausrechnen darf, um zugleich den körperlichen Inhalt eines gegebenen dreyseitigen Prismas mit zu finden. Sagt mir dieß. K. Ein rechtwinkeliges Parallelepipedum, das mit ihm, (den gegebenen dreyseitigen Prisma) gleiche Grundfläche und Höhe hat.

L. Gut! Würdet ihr denn wohl, wenn ihr die Grundfläche eines gegebenen dreyseitigen Prismas mit seiner Höhe multiplicirtet, andere Zahlen mit einander zu Factoren haben, als wenn ihr die Grundfläche und Höhe eines rechtwinkeligen Parallelepipedums, das die erwähnten Größen mit dem dreyseitigen Prisma gemein hätte, mit einander multiplicirtet? K. Nein.

L. Wenn ich also spräche: um den körperlichen Inhalt eines dreyseitigen Prismas zu finden, darf man nur den Inhalt seiner Grundfläche suchen und diesen mit seiner Höhe multipliciren, wäre diese meine Behauptung richtig oder nicht? K. Sie wäre ganz richtig.

L. Nun so wiederhohlt mir sie. K. Um den körperlichen ꝛc.

L. Jetzt wollen wir auf diese Art den Inhalt verschiedener dreyseitigen Prismen suchen. Zuerst wollen wir dasjenige, welches bereits vor uns steht, ausrechnen. Seine Grundfläche beträgt — ? K. Zwey Quadratzoll.

L. Und seine Höhe? K. Mißt drey Zoll.

L. Sein körperlicher Inhalt beträgt also — ?
K. Sechs Cubikzoll.

L. In so viel Cubikzolle kann ich es auch zerlegen, wie ihr seht.

Man bilde hier mit No. 10. und 11. verschiedene dreyseitige Prismen auf den Grundflächen Fig. 25. 26. und 31, lasse sie gehörig ausrechnen, und zeige am Ende durch Zerlegung in Cubikzolle, daß die Rechnung mit der Erfahrung übereinstimmt.

Zwanzigster Satz.

Zusatz *a.*

L. (, welcher mit 12 Stükken von No. 11. auf der Grundfläche b c d e a f Fig. 23. ein zwey Zoll hohes Prisma errichtet hat.) Wer sagt mir geschwind, wie dieser Körper heißt? K. Prisma.

L. Wie viel Seiten hat es denn? K. Sechs.

L. Also haben wir hier ein sechs- oder überhaupt ein vielseitiges Prisma. Dieses Prisma ist, wie ihr seht, nach mehreren Diagonalen seiner Grundflächen zerschnitten. Erstlich nach dieser da (den Schnitt a b zeigend); zweytens nach dieser (den Schnitt b e zeigend); drittens nach dieser (den Schnitt e c zeigend). Den Schnitt (a c) rechnen wir nicht, oder sehen wir als nicht vorhanden an. In wie viel Theile ist durch diese Schnitte der ganze Körper zerlegt? K. In vier.

L. Jetzt

L. Jetzt stellt euch vor als machte ich diese drey Schnitte, und zertheilte dadurch dieses Prisma in vier Theile. Nun wollen wir jedem dieser Theile mit einem Buchstaben bezeichnen, damit wir ihn darnach benennen, und uns kürzer ausdrükken können (die Buchstaben m, n, o, p auf die gehörigen Stellen etwa mit Bleistift schreibend). — So! Jetzt will ich diese vier Theile aus einander rükken, und ihr sagt mir, was jeder derselben, eurer Meynung nach, für ein Körper ist. K. Jeder ist ein dreyseitiges Prisma.

L. Ihr urtheilt nach dem Augenmaße richtig, und ich übergehe der Kürze wegen den Beweis, daß diese Theile wirklich Prismen sind. Seyd ihr wohl im Stande mir jedes dieser dreyseitigen Prismen auszurechnen? K. O ja.

L. Thut dieß und fangt mit dem Stükke m an. Die Größe seiner Grundfläche kennt ihr schon, sie beträgt nämlich — ? K. Einen halben Quadratzoll.

L. Wie viel sind dieß Quadratlinien? K. Funfzig.

L. Da wir die Grundfläche in Linien angegeben haben, so müßt ihr die Höhe auch in Linien suchen. Wie viel hält sie denn? K. Zwanzig.

L. Und das Produkt aus zwanzig nnd funfzig? K. Ist 1000.

L. Was führen diese tausend Einheiten für eine Benennung? K. Cubiklinien.

L. Und 1000 Cubiklinien, wie viel machen sie Cubikzolle? K. Einen.

L. Und daß dieses Prisma einen Cubikzoll hält, lehrt euch der Augenschein, da ihr wißt, daß diese zwey auf einander stehenden Stükke gerade einen Cubikzoll ausmachen.

L. Jetzt berechnet eben so das Prisma n. K. Die Grundfläche dieses Prismas beträgt einen Quadratzoll, seine Höhe beträgt zwey Zoll, also macht sein körperlicher Inhalt zwey Cubikzoll.

L. Die nämliche Größe hat auch das Prisma p, und das Prisma o ist so groß, als das Prisma m; folglich beträgt der körperliche Inhalt dieser vier Prismen zusammen genommen — ? K. Sechs Cubikzoll.

L. Jetzt rükke ich diese vier Prismen wieder zusammen, wie sie vorhin waren, und ihr sagt mir, wie viel dieses ganze vielseitige (auf Fig. 23. stehende) Prisma, Cubikzolle hält. K. Sechs.

L. Wir haben also jetzt den körperlichen Inhalt eines vielseitigen Prismas gefunden. Beschreibt mir geschwind die Art und Weise, wie wir das bewerkstelligt haben. K. Zuerst haben wir (Sie) das ganze vielseitige Prisma in lauter dreyseitige zerlegt, dann haben wir den Inhalt eines jeden derselben gesucht und sie am Ende zusammen addirt.

L. Auf die nämliche Art wird der Inhalt eines jeden vielseitigen Prismas gefunden. Denn da jedes Vielekk sich, wie ihr schon wißt, durch Diagonalen in Dreyekke zerlegen läßt; so lassen sich natürlich auch die Grundflächen vielseitiger Prismen durch Diagonalen in Dreyekke zerlegen. Diese Zerlegung nimmt man nun vor und zerschneidet —

aber natürlich nur in Gedanken — den Körper nach diesen in beyden Grundflächen ähnlich liegenden Diagonalen, wodurch man lauter dreyekkige Prismen erhält, die man einzeln ausrechnet und am Ende in Eine Summe bringt. Demnach betrachtet man ein auszurechnendes vielseitiges Prisma als eine Sammlung von lauter dreyseitigen. Indessen ist es nicht nöthig, jedes der dreyseitigen Prismen, worein man ein auszurechnendes vielseitiges in Gedanken zerlegt hat, einzeln auszurechnen, da man seinen Zwekk schon erreicht, wenn man nur alle die Triangel, welche den einzelnen Theilen des in Gedanken zerlegten Prismas zu Grundflächen dienen, ausrechnet, sie dann alle in eine Summe bringt, und diese mit der Höhe des ganzen Körpers multiplicirt. Da aber alle Triangel, worein man die Grundflächen eines Prismas zerlegt hat, zusammen genommen der ganzen Grundfläche gleich sind: so kann man ganz kurz also sagen: J e d e s P r i s m a, e s h a b e d e r S e i t e n s o v i e l a l s e s w o l l e, w i r d a u s g e r e c h n e t, w e n n m a n s e i n e G r u n d f l ä c h e m i t s e i n e r H ö h e m u l t i p l i c i r t. Wenn ihr demnach dieses (auf a c e b d Fig. 32. errichtete 2 Zoll hohe) vielseitige Prisma ausrechnen wollt, was habt ihr da vor allem zu thun? K. Da müssen wir seine Grundfläche ausrechnen.

L. Und wie findet ihr den Inhalt derselben, da sie ein Polygon ist? K. Wenn wir sie durch Diagonalen in Dreyekke zerlegen, diese einzeln ausrechnen und endlich zusammen in eine Summe bringen.

L. Macht

L. Macht es so. Da aber die Diagonalen schon gezogen sind, so zeigt mir sie. K. (zeigen die a b und b c.)

L. Wie viel Dreyekke haben wir durch diese Diagonalen bekommen und auszurechnen? K. Drey.

L. Zeigt mir sie. K. (zeigen a b d, a b c, und c b e.) Dieses Dreyekk (a d b) wollen wir No. 1, dieses hier (a b c) No. 2, und dieses endlich (c b e) No. 3. nennen. Welche Linie können wir wohl bey No. 1. und 2. als gemeinschaftliche Grundlinie annehmen? K. Diese hier (a b zeigend).

L. Gut! Dann ist diese Linie (d f) die Höhe von No. 1, und diese Linie hier (a c) die Höhe von No. 2. Welche Linie könnt ihr am füglichsten zur Grundlinie von No. 3. annehmen? K. Diese da (b e zeigend).

L. Und welche Linie wäre dann die Höhe dieses Dreyekks. K. Diese (c g zeigend).

L. Gut! Nun stellt eüre Rechnungen an, sprecht aber dabey alles laut aus. K. No. 1. ist an der Grundlinie 2 Zoll breit, und seine Höhe beträgt einen Zoll, also begreift sein Flächenraum die Hälfte von 1 Mahl 2, d. h. einen Quadratzoll. No. 2. ist 2 Zoll an der Grundlinie breit, und 2 Zoll hoch, folglich beträgt sein Flächenraum die Hälfte von 2 Mahl 2, das ist 2 Quadratzoll. No. 3. mißt an der Grundlinie 4 und in der Höhe 2 Zoll, also enthält sein ganzer Flächenraum, die Hälfte von 2 Mahl 4, das ist 4 Quadratzoll. Eins, zwey und vier macht aber sieben. Demnach enthält die Grundfläche dieses Prismas 7 Quadratzoll.

L. Nun

L. Nun habt ihr die Grundfläche. Was müßt ihr jetzt messen? K. Die Höhe.

L. Und was habt ihr dann zu thun? K. Dann müssen wir mit der gefundenen Höhe die Grundfläche multipliciren.

L. Thut dieß auch. K. Die Höhe beträgt 2 Zoll, damit die Grundfläche multiplicirt gibt 14, welche Zahl die Cubikzolle anzeigt, die in dem vorliegenden Körper enthalten sind.

L. Jetzt zerlegt dieses Prisma in lauter Cubikzolle und seht, ob es deren 14 enthält. K. (thun dieses).

L. Die Erfahrung bestätigt also auch hier die Richtigkeit unsers Verfahrens. Nun betrachtet dieses (auf A B C D E F G H Fig. 21. errichtete, 3 Zoll hohe) Prisma und sagt mir abermals, was zu thun wäre, wenn wir seinen körperlichen Inhalt finden wollten. K. Da müßten wir auch seine Grundfläche durch Diagonalen in Dreyekke zerlegen, diese, wenn wir sie einzeln ausgerechnet hätten, addiren, und dann die ganze Summe (Grundfläche) mit der Höhe multipliciren.

L. Das wäre recht. Bey dem vorliegenden Prisma können wir aber, wenn wir es ausrechnen wollen, kürzer zu unserm Ziele kommen. Da sich seine Grundfläche in mehrere gleiche Quadrate und Dreyekke eintheilen läßt; so können wir diese Eintheilung vornehmen, wodurch wir den Vortheil erhalten, daß wir nur Ein solches Quadrat und Ein dergleichen Dreyekk ausrechnen und dann nur sehen

sehen dürfen, wie viel Dreyekke und wie viel Quadrate wir haben, um daraus den Inhalt der ganzen Grundfläche bestimmen zu können. Da die Eintheilung in Quadrate und Dreyekke schon gemacht, und auch die Größe einer jeden dieser Figuren schon bekannt ist; so dürft ihr mir nur

1) die Dreyekke, 2) die Quadrate zusammen zählen. Thut dieß und sagt mir, die Anzahl von jeder Art dieser Figuren. K. Es sind vier Dreyekke und fünf Quadrate.

L. Und wie viel Quadratzolle halten diese Figuren zusammen? K. Sieben.

L. Nun da habt ihr auf ein Mahl die Grundfläche dieses Körpers. Jetzt multiplicirt diese mit der Höhe. K. Das giebt 21.

L. Also hält dieses Prisma 21 Cubikzoll. Zerlegt es, und ihr werdet diese Anzahl von unsern Würfeln darin finden. K. (zerlegen und zählen die Würfel.)

L. (, der ein etwas großes reguläres Sechsekk an die schwarze Tafel gezeichnet hat.) Nun rechnet aus, wie groß ein Prisma wäre, wenn es diese Figur zu Grundflächen hätte, und 12 Schuh hoch wäre. K. (zerfällen erst, nach dem 64sten Satze (der Planimetrie im 3ten Bdchn.), das vorgezeichnete Sechsekk in Dreyekke, und stellen dann die nöthigen Messungen und Rechnungen nach dem 64sten und 107ten Satze (des nämlichen Bdchs.) an.

Diese Uebungen werden noch eine Zeit lang fortgesetzt.

Ein

Ein und zwanzigster Satz.

Zusatz e.

L. Nun will ich ein Mahl die Vordersätze zu einem Schlußsatze aussprechen und sehen, wer geschwind den Schlußsatz finden kann. Der körperliche Inhalt eines jeden prismatischen Körpers wird gefunden, wenn man seine Grundfläche mit seiner Höhe multiplicirt, ein Cylinder ist ein Prismatischer Körper — ? K. Folglich wird der körperliche Inhalt eines Cylinders gefunden, wenn man seine Grundfläche mit seiner Höhe multiplicirt.

L. Gut! Was für eine Figur ist denn die Grundfläche eines Cylinders? K. Ein Kreis.

L. Und wie wird der Flächeninhalt eines Kreises gefunden? K. Wenn man ꝛc. (Satz 68. a.)

L. Wie findet man aber die Peripherie, da man diese nicht unmittelbar messen kann? K. Wenn man ꝛc. (Satz 67.)

L. Nun werdet ihr mir sagen können, was ihr vor allem thun müßt, um den körperlichen Inhalt dieses Cylinders (No. 17. + 15.) zu finden. K. Da müssen wir zuerst den Durchmesser seiner Grundfläche suchen und messen, um daraus die Peripherie berechnen zu können. Hierauf müssen wir die Grundfläche und Höhe suchen, und dann beydes mit einander multipliciren.

L. Da mir der Durchmesser der Grundfläche schon bekannt ist, so will ich euch der Mühe, ihn

zu

zu suchen überheben, und euch gleich sagen, daß er eben so wie die Höhe des Cylinders zwey Zoll beträgt. Nun aber sucht mir den körperlichen Inhalt dieses Körpers. K. (rechnen:

100 : 314 = 2 : Per.

100|6,28|

Die Peripherie beträgt also 6'', 2''', 8'''' = 628''''

628'''' Periph.

50''''$\frac{1}{4}$ des Durchmessers.

31400 = 3□'', 14□''' Inhalt der Grundfläche.

314□''' Grundfläche des Cylinders

20''' Höhe des Cylinders.

6280 = 6 c'', 280 c''', körperlicher Inhalt des Cylinders.

L. Wie viel beträgt also der körperliche Inhalt dieses Cylinders? K. 6 c'', und 280 c'''.

L. Da 250 Cubiklinien das Viertel eines Cubikzolles ausmachen, so können wir auch sagen, dieser Cylinder hält etwas (30 c''') mehr als 6$\frac{1}{4}$ Cubikzoll. Um euch hiervon durch eine sinnliche Wahrnehmung zu überzeugen, und dadurch die Richtigkeit unsers vorhingefundenen Schlußsatzes zu bestätigen, will ich jetzt in diesen blechernen Cylinder (No. 18.), in welchem, wie ihr seht dieser hölzerne (No. 17.) gerade paßt, so daß ich sagen kann, der eine ist so groß als der andere, sechs Cubikzoll von diesem feinen Sande schütten, wovon er beynahe ganz wird angefüllt werden. Der übrig blei-

bleibende leere Raum würde nämlich gar von den 280 Cubiklinien, die ich aus Mangel eines gehörigen Maßes nicht abmessen kann, angefüllt werden.

Die nöthige Anschauung wird hier veranstaltet, indem man mit No. 12. sechs Cubikzoll Sand in No. 18, mit der gehörigen Accuratesse mißt.

L. Jetzt rechnet auch diesen Cylinder (No. 15.) aus. Sein Durchmesser hält 1, seine Höhe 2 Zoll. K. (rechnen und finden, den körperlichen Inhalt = 1 c'', 570 c''').

L. Dieser Cylinder hält also etwas mehr als $1\frac{1}{2}$ Cubikzoll, daher ich auch, wie ihr jetzt sehen werdet, etwas mehr als $1\frac{1}{2}$ Cubikzoll Sand in diesen hohlen Cylinder (die Höhlung von No. 17.) der mit diesem da (No. 15) einerley ist, schütten kann. — —

L. Jetzt sucht den körperlichen Inhalt eines Cylinders, der 18 Schuh hoch ist, und eine Grundfläche hat, deren Durchmesser $1\frac{1}{2}$ Schuh hält.

Dergleichen Aufgaben werden mehrere vorgelegt.

Zwey und zwanzigster Satz.

Zusatz *f*.

L. (, welcher No. 15 + 17 bey der Hand hat) Sucht mir doch geschwind den Inhalt dieses Cylinders wieder. K. (messen den Diameter und die Höhe, und berechnen daraus den körperlichen Inhalt, wie vorhin.)

L. Die-

L. Dieses Cylinders Inhalt ist also = $6^{c''}$, $280^{c'''}$. Jetzt nehme ich von diesem, von euch berechneten Cylinder dieses Stükk (No. 15. herausziehend), welches ebenfalls ein Cylinder ist, weg, so daß wir in dem Reste eine Röhre, oder einen sogenannten cylindrischen Ring bekommen. Wer von euch wird nun wohl durch sein Nachdenken die Art und Weise herausbringen, wie der körperliche Inhalt dieser Röhre, der nun nicht mehr so viel, wie vorhin der ganze Cylinder, betragen kann, gefunden wird? K. Da darf man ja nur das herausgenommene Stükk (den kleinern Cylinder) ausrechnen, und ihn dann von dem ganzen oder größern Cylinder abziehen.

L. Richtig. Macht es ein Mahl so.

Die Kinder rechnen den kleinern Cylinder No. 15. wieder aus, und ziehen ihn dann von dem größern ab. Die Rechnung ist folgende:

$100 : 314 = 1 :$ *Per.*

$314''''$ *Periph.*

$25''''\frac{1}{4}$ des Durchmessers.

1570

628

$7850\,\square'''' = 78\,\square'''$, $50\,\square''''$ Grundfläche des kleinern Cylinders.

200 Höhe desselben.

$1{,}570{,}000 = 1^{c''}$, $570^{c'''}$.

$6^{c''}$, $280^{c'''}$ Inhalt von No. 17. + 15.

$1^{c''}$, $570^{c'''}$ Inhalt von No. 15.

Rest $4^{c''}$, $710^{c'''}$ Inhalt von No. 17.

L. Ihr

L. Ihr habt richtig gerechnet, $4\,c''$ und $710\,c'''$ beträgt der körperliche Inhalt dieser Röhre oder dieses cilindrischen Ringes. Nun werdet ihr mir sagen können, wie man überhaupt den körperlichen Inhalt einer Röhre finden kann. Wer sagt mir dieses geschwind? K. Den körperlichen Inhalt einer Röhre kann man finden, wenn man sie als einen Cylinder betrachtet, und 1) diesen, 2) den herausgenommenen Cylinder berechnet, und hierauf den letztern von dem erstern abzieht.

L. Gesetzt nun, ich wollte mir bleyerne Röhren, 50 Schuh lang, gießen, und die Wände derselben $2\frac{1}{2}$ Linie dikk, die Höhlung aber einen Zoll weit im Durchmesser (die Weite im Lichten einen Zoll groß) machen lassen, aber zuerst den körperlichen Inhalt dieser Röhren ausfindig machen: wie müßt ich hierbey verfahren? K. Da müßten Sie die Röhren zusammengenommen als einen Cylinder betrachten, der 50 Schuh hoch wäre und dessen Grundfläche im Durchmesser 1 Zoll, dann 2 Mahl $2\frac{1}{2}$ Linien, überhaupt also 15 Linien hielte, und dieses Cylinders körperlichen Inhalt suchen. Hierauf müßten Sie die Höhlung als einen herausgenommenen kleinern Cylinder betrachten, der auch 50 Schuh hoch wäre, dessen Grundfläche im Durchmesser aber nur einen Zoll hielte, diesen (Cylinder) auch ausrechnen und dann von dem größern abziehen.

L. Ihr habt das in dem angenommenen Falle zu beobachtende Verfahren richtig beschrieben, nun stellt auch die Rechnung selbst an.

Die

Die Schüler stellen, wenn sie anders mit den Decimalbrüchen umgehen können, folgende Rechnung an:

Berechnung des ganzen Cylinders.

100 : 314 = 15'''' : *Per.*

15

1570
314
---
100) 47| 10 = 4'', 7''', 1'''' *Periph.*

471'''' *Periph.* der Grundfläche des ganzen Cylinders.

37,5'''' ¼ des Durchmessers.

2355
3297
1413

17662,5□'''' = 1□'', 76□''', 62,5□'''' Inhalt der Grundfläche.

17662,5□'''' Grundfläche.
50000'''' Höhe des Cylinders.

883125000,0 c'''' = 883 c'', 125 c''' Inhalt des ganzen größern Cylinders.

Berechnung des kleinern herausgenommenen Cylinders, oder des Raumes in der Röhre.

100 : 314 = 1'' : *Per.*

314''' *Periph.*
25'''' des Durchmessers.

1570
628

7850□'''' = 78□''', 50□'''' Inhalt der Grundfläche.

7850 □'''' Grundfläche.
50000'''' Höhe.

392500000 c'''' = 392 c'', 500 c''' körperlicher Inhalt.

883125 c''' Inhalt des ganzen Cylinders.
392500 c''' Inhalt des kleinern Cyl. oder der Höhlung in der Röhre.

Rest 490625 c''' = 490 c'' 625 c''' körperl. Inhalt der Röhre.

L. Nun wißt ihr den körperlichen Juhalt der Wände einer von uns angenommenen bleyernen Röhre (eines cylindrischen Ringes). Jetzt rechnet auch aus, wie viel Pfund Bley zu dieser Röhre erforderlich wäre, da der Cubikschuh dieses Metalls 704 ℔ wiegt. K. setzen an:

Cubiksch.		℔		Cubiklinien.
1	—	704	=	490625
1000				704
1000 c''				1962500
1000				3434375
1000000 c'''		1000000 | 345 | 400000 | $345\frac{4}{10}$ ℔		

L. Nun haben wir auch das Gewicht des erforderlichen Bleyes. Jetzt rechnet noch aus, wie viel es kosten würde, wenn man das Pfund mit 12 kr. bezahlen müßte.

K. rechnen folgendes Exempel aus:

℔.		kr.	℔.
1	—	12	$345\frac{4}{10}$

L. Aus

L. Aus diesem Beyspiele werdet ihr abermals sehen, wie man im gemeinen Leben Gebrauch von den Kenntnißen und Fertigkeiten, die ich eüch in diesen unsern Lectionen beyzubringen suche, machen kann.

Zur Uebung werden natürlich noch mehrere dergleichen Exempel ausgerechnet.

Drey und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

L. (, welcher No. 29. gehörig zusammengelegt in der Hand hat.) Was für einen Körper habe ich denn wohl jetzt in meiner Hand da? K. Ein dreyseitiges Prisma.

L. Zeigt mir seine beyden Grundflächen. K. (zeigen A und C).

L. Merkt zugleich die Buchstaben, womit diese Flächen bezeichnet sind. Seht hier steht A und hier (zeigend) C. Nach diesen Buchstaben werde ich diese Flächen benennen. (Das Prisma in seine Theile zerlegend.) In wie viel Theile habe ich jetzt dieses Prisma zerlegt? K. In drey.

L. Und was ist jeder einzelne Theil für ein Körper? K. Eine Pyramide.

L. Diese drey Pyramiden wollen wir jetzt mit einander vergleichen und sehen, ob wir nicht herausbringen können, wie sie sich zu einander verhalten. Sucht mir erst diejenigen zwey davon heraus, wel-

che die Flächen A und C zu Grundflächen haben. K. (thun dieß.)

L. Jetzt bedenkt, daß die beyden Linien da, nämlich hier (zeigend) die Linie g m und hier (zeigend) die Linie r s vorhin Seitenlinien eines geraden Prismas waren und senkrecht auf den Grundflächen dieser Pyramiden stehen, folglich ihre Höhe anzeigen, und sagt mir, wie ihr wohl glaubt, daß sich diese zwey von euch herausgesuchten Pyramiden zu einander verhalten müssen. K. Sie müssen einander gleich seyn.

L. Von dieser eurer Aussage wünsche ich auch den Grund zu vernehmen. K. Es haben ja beyde Pyramiden gleiche Grundflächen und Höhen.

L. Woher wißt ihr denn aber, daß diese Grössen in beyden Körpern gleich sind? K. Die Grundflächen müssen einander gleich seyn, weil es vorhin die Grundflächen eines Prismas waren, die ja gleich groß seyn müssen. Und ihre Höhen müssen auch einander gleich seyn, weil die Linie g m und r s, die ja die Höhen anzeigen, vorhin Seitenlinien eines Prismas (oder auch die gegenüber stehenden Seiten eines Parallelogramms) waren.

L. Ihr habt eure Behauptung bündig bewiesen und die Gleichheit dieser zwey Pyramiden kann nicht bezweifelt werden.

Nun lege man No. 29. B an No. 29. C so, daß die mit E und D bezeichneten Durchschnittsflächen einander dekken, und halte die Fläche e + d den Augen der Kinder vor.

L. Sagt mir doch, was diese Fläche hier (c + d) für eine Figur ist. K. Ein Parallelogramm.

L. Wie verhalten sich denn die zwey Dreyekke, worein dieses Parallelogramm durch die Diagonale getheilt ist, zu einander? K. Diese sind einander gleich.

L. Also die Fläche c ist gleich der Fläche d. Wenn wir diese beyden Flächen als die Grundflächen dieser zwey Pyramiden (No. 29. B und No. 29. C) ansehen, sie auf diese Flächen stellen und sie so, wie ich jetzt thue, an einander rükken (beyde Stükke mit den Flächen E und D an einander und dann das Ganze auf die Fläche c + d legend), so haben beyde hier die Spitze oder den Gipfel l (o) mit einander gemein. Wenn wir nun von diesem Punkte die senkrechte Linie l k ziehen, so zeigt diese nicht nur die Höhe dieser (29 C), sondern auch die Höhe dieser (No. 29. B) Pyramide an, weil diese Linie 1) vom Gipfel von 29 C auf die Grundfläche, 2) vom Gipfel von 29 B auf die erweiterte Grundfläche senkrecht gezogen ist. Nunmehr könnt ihr mir sagen, wie sich diese zwey Pyramiden (No. 29 B und 29 C) zu einander verhalten müssen. K. Sie müssen auch einander gleich seyn.

L. Warum? K. Weil beyde gleiche Grundflächen und Höhen haben.

L. Gut! No. 29. A und 29 C sind, wie wir vorhin gezeigt haben, einander gleich. No. 29. C und 29. B. sind auch einander gleich, also haben wir hier in No. 29 A und 29 B. zwey Größen, welche einer dritten nämlich No. 29 C gleich sind.

Was

Was folgt hieraus? K. Daß auch No. 29. A und 29 B einander gleich seyn müssen.

L. Also sind diese drey Pyramiden einander gleich. Demnach ist dieses Prisma (die drey Pyramiden wieder gehörig an einander legend) in drey gleiche Theile also in Drittel getheilt. Jetzt sagt mir, der wie vielste Theil diese dreyseitige Pyramide (No. 29 A ergreifend) von diesem dreyseitigen Prisma (das ganze Prisma durch gehörige Anlegung des A wieder herstellend) da ist, welches mit ihr (der Pyramide) einerley Grundfläche und Höhe hat. K. Der dritte.

L. Was behauptet ihr jetzt von dieser dreyseitigen Pyramide? K. Daß sie der dritte Theil von einem dreyseitigen Prisma sey, welches mit ihr einerley Grundfläche und Höhe hat.

L. Jetzt will ich sehen, wie viel von euch mir ohne meine Beyhülfe beweisen können, daß diese drey Pyramiden einander gleich seyn müssen. K. (suchen diesen Beweis nun ohne Beyhülfe des Lehrers zu führen).

L. Da wir jedes dreyseitige Prisma, eben so wie dieses, in drey dreyseitige Pyramiden zerschneiden oder zerschnitten denken, und von den Theilen, wie wir erst gethan haben, beweisen können, daß sie einander gleich seyn müssen; so können wir von jeder dreyseitigen Pyramide behaupten — nun was meynt ihr? K. Daß sie der dritte Theil seyn müsse, von einem dreyseitigen Prisma, welches mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

L. Hier (No. 13. vorlegend) habe ich ein dreyseitiges Prisma, und hier (No. 26. vorlegend) eine dreyseitige Pyramide. Beyde Körper haben gleiche Grundflächen und Höhen. Sind sie wohl auch einander gleich? K. Nein.

L. Welcher von beyden Körpern ist denn der größere? K. Das Prisma.

L. Wie viel Mahl ist aber dieses größer als die Pyramide? K. Drey Mahl.

L. Nach welchem Satze könnt ihr dieses behaupten? K. Nach dem: Eine dreyseitige Pyramide ist das Drittel ꝛc.

L. Da muß also auch dieses Prisma (No. 13.) drey Mahl so viel von unserm Sande fassen, als diese Pyramide (No. 26). Und daß dem wirklich so sey, will ich euch jetzt zeigen.

No. 26. wird nun drey Mahl nach einander mit Sand gefüllt und dieser jedes Mahl in No. 13. geschüttet.

Vier und zwanzigster Satz.

Aufgabe.

L. Gesetzt, ihr hättet den körperlichen Inhalt dieses Prismas (No. 29.) gefunden, könntet ihr mir dann nicht auch sagen, wie groß diese Pyramide (No. 29. A ergreifend) seyn muß? K. O ja.

L. Aber

L. Aber wie könntet ihr denn ihre Größe finden? K. Wenn wir den dritten Theil von dem Prisma nähmen.

L. Und wenn ich euch den Auftrag gäbe, den Inhalt dieser Pyramide (No. 29. A) zu suchen, was dürftet ihr da nur thun, um ihn zu finden? K. Da dürften wir ja nur den Inhalt dieses Prismas (No. 29) suchen, und dann das Drittel davon nehmen.

L. Hättet ihr denn, wenn ihr dieses Prismas (No. 29.) Inhalt suchtet, andere Zahlen mit einander zu multipliciren, als wenn ihr z. B. die Grundfläche (A) und die Höhe (g n) dieser Pyramide No. 29. A mit einander multiplicirtet? K. Nein.

L. Um also den Inhalt dieser Pyramide (No. 29. A) zu finden, müßte vor allen Dingen die Grundfläche A mit der Höhe g n multiplicirt werden. Wäre aber dieses schon genug? K. Nein.

L. Was müßte mit dem gefundenen Produkte erst noch geschehen? K. Es müßte mit drey dividirt (in drey gleiche Theile getheilt) werden.

L. Nun sagt mir alles zusammen, was geschehen müßte, wenn ihr den Inhalt dieser Pyramide da (No. 29 A) finden wolltet? K. Da müßten wir erst ihre Grundfläche mit ihrer Höhe multipliciren und das gefundene Produkt mit drey dividiren.

L. Das wäre recht. Und da jede dreyseitige Pyramide das Drittel von einem dreyseitigen Prisma von gleicher Höhe und Grundfläche ist; so würdet ihr auf diese erst angegebene Art von jeder dreyseitigen Pyramide den körperlichen Inhalt finden

den. Ihr habt also abermals eine Aufgabe auflösen gelernt. Wie muß diese (Aufgabe) lauten? K. Den körperlichen Inhalt einer dreyseitigen Pyramide zu finden.

L. Und wie lautet die Auflösung? K. Multiplicire die Grundfläche mit der Höhe und dividire das Produkt mit drey.

L. Ich will nun sehen, ob ihr hievon Anwendung machen und den Inhalt dieser Pyramide da (No. 26. vorlegend) finden könnt. Der Triangel, der ihre Oeffnung da gerade bedekken würde, soll die Grundfläche seyn und dieser Triangel nun hat eine Grundlinie die 3'' und 6''' *) und eine Höhe die 1'' und 8''' beträgt. Die Höhe der Pyramide hält aber 2 Zoll. K. (machen folgende Rechnung:

36''' Grundlinie der Grundfläche.
18''' Höhe der Grundfläche.

288
36

2) 648 | 324□''' = 3□'' 24□''' Inhalt der Grundfläche.

324□''' Grundfläche
20''' Höhe der Pyramide

3 | 6480 | 2160 c''' = 2 c'', 160 c''')

4
3

18

0

L. Nach

*) Der Bequemlichkeit wegen ist hier der gewöhnliche Zoll (der 12te Theil des rhein. Fußes) in 10 gleiche Theile getheilt und ein solcher eine Linie genannt worden.

L. Nach dieser Rechnung hält diese Pyramide —? K. Zwey Cubikzoll und 160 Cubiklinien.

L. Da 200 Cubiklinien erst der 5te Theil eines Cubikzolles sind, so beträgt also der Inhalt dieser Pyramide nicht gar ein Fünftel mehr als 2 Cubikzoll. Wir wollen doch sehen, ob die Erfahrung hiemit übereinstimmt, und ob wir wirklich etwas mehr als 2 Cubikzoll Sand in dieselbe füllen können. — — — (Nach der hier anzustellenden Messung.) Da habt ihrs! Ich konnte wirklich etwas mehr als die zwey Cubikzoll Sand in dieselbe schütten. Nun sucht auch den körperlichen Inhalt dieser Pyramide (No. 27.) deren Grundfläche ein Quadrat, doppelt so groß, als dieses da (die Grundfläche von No. 25. zeigend) ist, mithin 6□'', 48□''' hält, und die zwey Zoll hoch ist.

K. (rechnen: 648□''' Grundfläche
20''' Höhe der Pyramide

3 | 12960 | 4320 c''' = 4 c'', 320 c'''

L. Nun sollt ihr sehen, daß ich wirklich etwas mehr als 4 Cubikzoll Sand in diese Pyramide (No. 27.) schütten kann.

Die nöthige Anschauung wird hier veranstaltet.

Jetzt rechnet mir auch aus, wie viel der körperliche Inhalt einer Pyramide betragen würde, die diesen Trinagel (dergleichen Figur in ziemlicher Größe verzeichnend) zur Grundfläche hätte, und 4 Schuh 6 Zoll hoch wäre. K. (messen den verzeichneten

Trian-

Triangel aus und stellen dann die nöthige Rechnung an.)

Dergleichen Exempel werden mehrere zum Ausrechnen vorgelegt.

Fünf und zwanzigster Satz.

Zusatz a.

L. Hier habe ich 18 Bohnen in drey ungleiche Theile getheilt, und hieher 3, daher 6 und daher 9 gelegt. Jetzt nimm du, Karl, von jedem dieser Theile das Drittel. K. (thut dieß).

L. Wie viel hast du zusammen Bohnen da weggenommen? K. Sechs.

L. Den wie vielsten Theil machen diese von der ganzen Zahl 18 aus? K. Den dritten.

L. Nun will ich diese 18 Bohnen in vier Theile, nämlich in 3, 4, 5, 6 zerlegen — So! Sagt jetzt, wie viel das Drittel von drey ist. K. Eins.

L. Und das Drittel von vier? K. $1\frac{1}{3}$.

L. Und das Drittel von fünf? K. Eins und zwey Drittel.

L. Und endlich das Drittel von sechs? K. Zwey.

L. Wie viel machen folgende Zahlen $1 + 1\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3} + 2$ zusammen genommen? K. Sechs.

L. Und der wie vielste Theil ist dieß von 18? K. Der dritte.

L. Nun

L. Nun werdet ihr folgenden Satz verstehen: Wenn ich irgend ein Ganzes in mehrere Theile theile und dann von jedem dieser Theile das Drittel nehme, so machen diese weggenommenen Drittel zusammen genommen gerade auch den dritten Theil des Ganzen aus.

Gesetzt also, ich zerlegte einen Kuchen in 5 Theile, nähme von jedem dieser Theile das Drittel, den wie vielsten Theil vom ganzen Kuchen machten diese Drittel zusammen genommen? K. Den dritten.

L. Und wenn ich ein Prisma in 8 Theile zerlegte, von jedem dieser Theile das Drittel nähme, den wie vielsten Theil hätte ich dadurch vom ganzen Prisma bekommen? K. Auch den dritten Theil.

L. Gut! Daß merkt einstweilen. Nun seht hier diese Pyramide (No. 20. 21. und 22. so an einander gelegt, daß ihre Grundfläche die Figur A B C D E Fig. 27. bilden und ihre Spitzen zusammen laufen, vorhaltend) an und sagt, wie viel Seiten sie hat. K. Fünf.

L. Also ist ihre Grundfläche ein Fünfekk. In wie viel Dreyekke ist denn dieses Fünfekk durch Diagonalen zerlegt? K. In drey.

L. Nach diesen Diagonalen ist diese Pyramide zerschnitten und zwar so, daß jeder Schnitt nach der Spitze zu gieng. Dadurch sind diese drey Theile (die 3 Nummern aus einander nehmend) entstanden. Was ist nun jeder Theil für ein Körper? K. Eine Pyramide.

L. Von

L. Von wie viel Seiten? K. Von dreyen.

L. Wir haben sonach eine fünfseitige Pyramide in drey dreyseitige von gleicher Höhe zerlegt. Ihre Benennungen wollen wir von den Numern, womit sie bezeichnet sind, hernehmen. Nun will ich hier drey dreyseitige Prismen bilden, wovon das erste mit der Pyramide No. 20, das zweyte mit der Pyramide No. 21. und das dritte mit der Pyramide No. 22. gleiche Grundfläche und Höhe haben soll.

Mit 15 Stükken von No. 11. werden hier 3 Prismen jedes von 3 Zoll Höhe auf den Grundflächen A B C, D E F. und G I H Fig. 28, 29 und 30 errichtet.

So! Jetzt sagt mir worin die Pyramide No. 20. mit diesem (auf der Grundfläche A B C Fig. 28. stehenden) Prisma übereinkommt. K. In der Höhe und Grundfläche.

L. Der wie vielste Theil muß also diese Pyramide (No. 20) von diesem Prisma seyn? K. Der dritte.

L. Nach welchem schon erwiesenen Satze könnt ihr dieses behaupten? K. Nach dem: Eine dreyseitige Pyramide rc. (Satz 23.)

L. Der wie vielste Theil ist denn hier diese Pyramide (No. 21) von diesem (auf D E F Fig. 29. stehenden) Prisma da? K. Auch der dritte.

L. Aus welchem Grunde behauptet ihr dieses? K. Weil beyde Körper gleiche Grundflächen und Höhen haben und in diesem Falle eine dreyseitige Pyramide alle Mahl rc.

L. Wie

L. Wie verhält sich aber die Pyramide No. 22. zu diesem dritten (auf G H I Fig. 30. stehenden) Prisma da? K. Diese ist auch davon der dritte Theil, weil ꝛc.

L. Gut! Jetzt will ich diese 3 Prismen zusammen schieben, daß sie nur ein einziges bilden (die drey erwähnten Körper so zusammen rükkend, daß ihre Grundflächen die Fläche A B C D E Fig. 27. bilden): eben so will ich diese drey Pyramiden (No. 20. 21. 22.) wieder zu einer einzigen fünfseitigen vereinigen, die mit diesem Prisma gleiche Grundfläche und Höhe hat. — So! Jetzt sagt mir, wie sich diese ganze fünfseitige Pyramide zu diesem Prisma, das mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat, verhält. K. Sie muß der dritte Theil davon seyn.

L. Wie kommt ihr auf diese Behauptung? K. Weil jede einzelne dreyseitige Pyramide, woraus diese größere fünfseitige besteht, das Drittel von einem einzelnen der dreyseitigen Prismen ist, woraus dieses fünfseitige Prisma zusammen gesetzt ist; so müssen ja diese Drittel zusammen genommen d. h. die ganze fünfseitige Pyramide den dritten Theil von diesem ganzen (auf A B C D E Fig. 27. stehenden) Prisma ausmachen.

L. Richtig! Und da sich jede vielseitige Pyramide in lauter dreyseitige, eben so wie diese hier, wenigstens in Gedanken, zerlegen läßt; so läßt sich von jedem solchen Körper auf die jetzt gezeigte Art beweisen, daß er der dritte Theil ist, von einem Prisma, welches mit ihm einerley Grundfläche und

Höhe

Höhe hat, oder: Es läßt sich gerade auf die Art, wie wir es jetzt gemacht haben, beweisen, daß die vielseitige Pyramide der dritte Theil des vielseitigen Prismas von eben der Höhe über eben der Grundfläche ist. Für einen besondern Fall kann ich euch die Wahrheit dieses Satzes noch durch Hülfe dieses zerschnittenen Würfels (No. 9 vorlegend) beweisen.

Dieser Würfel ist nämlich in drey Pyramiden zerlegt und jede derselben hat eine Fläche des Würfels zur Grundfläche und die Seite desselben zur Höhe, folglich haben sie alle drey gleiche Grundflächen uud Höhen und sind demnach von einerley Größe. Sind sie aber gleich groß, so ist jede der dritte Theil von dem Würfel. Demnach ist diese vierseitige Pyramide (ein Stükk von No. 9 ergreifend) der dritte Theil von dem vierseitigen Prisma — ein Würfel ist ja ein Prisma — das mit ihr die nämliche Grundfläche und Höhe hat. — — Nunmehr kann es euch nicht schwer werden, auch eine vielseitige Pyramide ausrechnen. Wer sagt mir wohl, wie dieses zu bewerkstelligen ist? K. Man rechnet erst das vielseitige Prisma aus, wovon die auszurechnende Pyramide das Drittel ist, und dividirt den gefundenen Inhalt mit drey.

L. Richtig! Da wir aber, wenn wir ein Prisma ausrechnen wollen, wovon eine gegebene Pyramide das Drittel ist, die Grundfläche derselben mit ihrer Höhe multipliciren müssen; so können wir auch sagen: Der Inhalt einer jeden vielseitigen Pyramide wird gefunden, wenn

wir

wir ihre Grundfläche ausrechnen, diese mit der Höhe multipliciren und das dadurch gefundene Produkt mit drey dividiren. Und da es einerley ist, ob wir das Produkt von 2 Factoren, oder einen dieser letztern mit 3 oder irgend einer Zahl dividiren: so können wir auch sagen: *Der Inhalt einer Pyramide wird gefunden, wenn wir ihre Grundfläche mit dem dritten Theile ihrer Höhe multipliciren.* Nun wollen wir ein Mahl den Inhalt dieser fünfseitigen Pyramide (No. 20. 21. und 22. gehörig zusammen gelegt vorhaltend) ausrechnen. Die Grundfläche ist bereits in Dreyekke, deren Größe ihr schon kennt, zerlegt, und ihr dürft diese nur zusammen rechnen. K. Sie beträgt $2\frac{1}{2}$ Quadratzoll.

L. Also zwey Quadratzoll und funfzig Quadratlinien = 250 Quadratlinien. In der Höhe mißt sie drey Zoll. Nun rechnet. K. (rechnen:

$250\square'''$ Grundfläche.
$30'''$ Höhe.

$$
\begin{array}{l|l|l}
3 & 7500 & 2500^{c'''} = 2^{c''},\ 500^{c'''}) \\
 & 6 & \\
\hline
 & 15 & \\
 & 15 & \\
\hline
 & 0 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

L. Also $2\frac{1}{2}$ Cubikzoll hält diese Pyramide. Wir wollen sehen, ob ihr recht gerechnet habt. Hier (auf A B C D E Fig. 27. ein drey Zoll hohes Prisma

ma mit 15 Stükken von No. 11. errichtend) ist das Prisma, welches mit unserer jetzt ausgerechneten Pyramide gleiche Höhe und Grundfläche hat, zerlegt es in lauter Cubikzolle und seht, wie viel deren sind. K. Es sind ihrer sieben und ein halber.

L. Wie viel sind das halbe? K. Fünfzehn.

L. Und das Drittel von funfzehn? K. Ist fünf.

L. Und fünf halbe Cubikzolle wie viel sind das ganze? K. Zwey ganze und ein halber.

L. Das Drittel von diesem Prisma macht also gerade $2\frac{1}{2}$ Cubikzoll, und so viel beträgt ja nach eürer Rechnung auch diese Pyramide, die von dem erwähnten Körper den dritten Theil ausmachen muß, woraus die Richtigkeit eürer Rechnung erhellet. Jetzt rechnet aus, wie groß eine Pyramide auf dieser Grundfläche (irgend ein Polygon an die schwarze Tafel verzeichnend) von 7 Schuh Höhe seyn muß.

Diese Uebung wird eine Zeitlang fortgesetzt.

Sechs und zwanzigster Satz.

Zusatz b.

L. Da ihr nun wißt, wie man den körperlichen Inhalt einer jeden Pyramide findet, so werdet ihr mir gewiß sagen können, wie man einen Kegel ausrechnet. K. Man multiplicirt eben auch seine Grundfläche mit seiner Höhe

und

und nimmt von dem dadurch erhaltenen Produkte das Drittel.

L. Warum glaubt ihr denn, daß man auf diese Weise den körperlichen Inhalt eines Kegels finden könne? K. Weil er auch eine Pyramide ist.

L. Gut! Was für eine Figur ist denn aber die Grundfläche des Kegels? K. Ein Kreis.

L. Und was muß mir bekannt seyn, wenn ich den Inhalt einer Kreisfläche finden will? K. Entweder der Durchmesser oder die Peripherie.

L. Am sichersten ist es, wenn ihr bey einem auszurechnenden Kegel den Durchmesser seiner Grundflächen sucht und ausmeßt, wenn er euch nicht schon bekannt ist.

L. Nun sucht doch ein Mahl den körperlichen Inhalt dieses Kegels (No. 30 vorlegend).

K. (suchen den Durchmesser der Grundfläche der $= 2''$ ist, daraus die Peripherie und dann den Flächeninhalt. Hierauf messen sie die Höhe des Kegels *) multipliciren damit die Grundfläche und dividiren das Produkt mit drey, wodurch folgende Rechnung entsteht.

$100 : 314 = 2 :$ Periph.

2

$100 \,|\, 628 \,|\, 6\tfrac{28}{100} = 6'',\ 2''',\ 8''''$ Periph.

$628''''$ Periph.

$50''''\ \tfrac{1}{4}$ des Durchmessers

$31400\square'''' = 3\square'',\ 14\square'''$ Flächeninhalt.

$314'''$

*) Hier muß der Lehrer zeigen, wie die Axe eines geraden Kegels gemessen werden muß.

$314'''$ Grundfläche des Kegels.
$20'''$ Höhe desselben.

$3 | 6280 | 2093\frac{1}{3}\,c''' = 2\,c'', 93\frac{1}{3}\,c'''$ körperlicher Inhalt.

```
3|6280|2093⅓
 |6:  |
 -----
   28
   27
   --
   10
    9
   --
    1
```

L. Nach eürer Rechnung enthält also dieser Kegel etwas mehr als zwey Cubikzoll. Da nun dieser Cylinder (No. 18) etwas über 6 Cubikzoll ($6c''$, $280c'''$) hält, wie ihr schon wißt, so muß er, wenn ich diesen Kegel hinein stelle, noch etwas mehr als 4 Cubikzoll Sand faßen. Und daß dieß wirklich der Fall sey, will ich eüch jetzt zeigen.

Der Kegel No. 30. wird in den Cylinder No. 18 gestellt und der übrige leere Raum mit Sand, der mit No. 12 hineingemessen wird, ausgefüllt.

L. (, welcher einen beliebigen Kreis an die schwarze Tafel verzeichnet hat.) Dieser Kreis soll die Grundfläche eines Kegels seyn, dessen Höhe einen Schuh und neün Zoll beträgt. Sucht nun den körperlichen Inhalt desselben. K. (thun dieß).

Dergleichen Aufgaben werden mehrere vorgelegt.

L. Wenn ihr bedenkt, daß dieser Cylinder No. 17 + 15 ein Prisma, und dieser Kegel (No. 30.) eine Pyramide ist; 2) daß sowohl Cylinder als Kegel Kreise, also Figuren von einerley Art, zu Grund-

flächen

flächen haben, und wenn ich euch ferner sage, daß diese zwey Körper gleiche Grundflächen und Höhen haben: so werdet ihr mir gewiß auch sagen können, wie sich dieser Kegel zu dem Cylinder da verhält. K. Der erstere muß das Drittel von dem letztern seyn.

L. Das ist richtig. Aber nun sagt mir auch, aus welchem Satze ihr diese Wahrheit gefolgert habt. K. Aus diesem: jede Pyramide ist das Drittel von dem Prisma, welches ꝛc.

L. Wenn nun irgend ein Cylinder gerade 20 Cubikschuh hielte, wie viel müßte denn ein Kegel, der mit diesem Cylinder einerley Grundfläche und Höhe hätte, halten? K. $6\frac{2}{3}$ Cubikschuh.

L. Warum gerade $6\frac{2}{3}$ Cubikschuh, und nicht mehr und nicht weniger? K. Weil ein Kegel gerade das Drittel von denjenigen Cylinder seyn muß, mit welchem er einerley Grundfläche und Höhe hat.

Sieben und zwanzigster Satz.

Lehrsatz.

L. (, welcher zwey Prismen, das eine auf der Grundfläche A B C Fig. 17. 2 Zoll hoch, das andere auf der Grundfläche A e f g Fig. 22. 4 Zoll hoch errichtet hat.) Hier habe ich zwey Prismen, wovon ich das niedrigere A, das höhere B nennen will. Forscht doch ein Mahl nach und seht, wel-

ches von beyden die größere Grundfläche hat. K. Es hat das eine eine eben so große Grundfläche, als das andere.

L. Wie habt ihr denn dieß herausgebracht? K. Dadurch, daß wir bey dem einen so wie bey dem andern die Quadratzolle seiner Grundfläche zusammen gezählt haben.

L. Und wie viel Quadratzolle hält denn eines jeden Grundfläche? K. Zwey.

L. Ist denn wohl die Höhe bey beyden Körpern auch einerley? K. Nein.

L. Nun sagt mir, was an diesen beyden Körpern von gleicher, und was von verschiedener Größe ist. K. Die Grundfläche ist bey ihnen gleich, aber die Höhe ist verschieden.

L. Wie oft ist denn die Höhe von A in der Höhe von B enthalten? K. Zwey Mahl.

L. Jetzt erforscht doch auch den körperlichen Inhalt beyder Prismen. K. A hat 4, B aber 8 Cubikzoll.

L. Wie oft ist denn 4 in 8 enthalten? K. Auch zwey Mahl.

L. Wie verhalten sich demnach diese zwey Prismen zu einander, wie ihre Grundflächen oder wie ihre Höhen? K. Wie ihre Höhen.

L. Was bey den vorliegenden zwey Prismen der Fall ist, das ist bey allen prismatischen Körpern der Fall. Es verhalten sich nämlich alle dergleichen Körper zu einander, wie ihre Höhen, wenn sie gleiche Grundflächen

chen haben. Wer diesen Satz behalten hat, der wird mir gleich sagen können, wie oft jetzt (das Prisma A um einen Zoll erhöhend, indem noch eine Schicht von einem ganzen und zwey halben Würfeln von No. 10 und 11. darauf gelegt wird,) das Prisma A in dem Prisma B enthalten ist. K. Ein und ein Drittel Mahl.

L. Wie lautet der Satz, nach welchem ihr dieß sogleich sagen könntet? K. Alle prismatischen Körper verhalten sich ꝛc.

L. Aber wie oft ist jetzt (von dem Prisma B zwey Schichten von Würfeln wegnehmend, so daß es nur zwey Zoll hoch bleibt,) A in B enthalten? K. Zwey Drittel Mahl.

L. (, welcher zwey andere Prismen, das eine auf der Grundfläche A B C D E F Fig. 20. 2 Zoll hoch, das andere auf der Grundfläche I H K D Fig. 24. 3 Zoll hoch errichtet hat.) Untersucht geschwind die Grundflächen dieser 2 Prismen und sagt, wie sie sich zu einander verhalten. K. Sie sind einander gleich.

L. Wie habt ihr dieß heraus gebracht? K. Wir haben gesehen, wie viel Quadratzolle jede derselben enthält.

L. Da die Grundflächen dieser Prismen gleich sind, so werden sie wohl auch einerley körperlichen Inhalt haben? K. Das kann nicht seyn.

L. Warum nicht? K. Weil sie nicht auch gleiche Höhen haben.

L. Wie oft ist denn die Höhe dieses sechsekkigen Prismas in der Höhe des vierekkigen da enthalten? K. Ein und ein halb Mahl.

L. Wie oft muß demnach das ganze sechsekkige Prisma in dem vierekkigen enthalten seyn? K. Auch ein und ein halb Mahl.

L. Zählt die einzelnen Cubikzolle, die jedes in sich faßt, und seht, ob deren in dem einen $1\frac{1}{2}$ Mahl so viel, als in dem andern enthalten sind. K. (thun dieß.)

L. (, welcher sowohl auf ABC Fig. 17. als auf ABCDE Fig. 20. ein Prisma von 2 Zoll Höhe errichtet hat.) Glaubt ihr wohl, daß diese 2 Prismen gleichen körperlichen Inhalt haben? K. Nein.

L. Aber sie haben doch, wie ihr seht, gleiche Höhe? K. Aber nicht gleiche Grundflächen.

L. Was ist also an diesen Prismen von gleicher Größe, und was nicht? K. Die Höhe ist bey beyden gleich, aber die Grundfläche nicht.

L. Seht doch, wie sich beyder Grundflächen zu einander verhalten. K. Die Grundfläche von diesem hier (zeigend) ist noch ein Mahl so groß, als die Grundfläche von diesem da.

L. Wie vermuthet ihr wohl, daß sich beyde in Ansehung ihres körperlichen Inhalts zu einander verhalten mögen? K. Das eine ist noch ein Mahl so groß als das andere.

L. Woraus scheint euch dieß zu folgen? K. Aus dem Umstande, daß das eine mit dem andern glei-

gleiche Höhe aber eine noch ein Mahl so große Grundfläche hat.

L. Gesetzt aber, das eine hätte eine drey Mahl so große Grundfläche, als das andere, übrigens aber mit diesem gleiche Höhe, wie oft meynt ihr wohl daß dann das mit der kleinern Grundfläche in dem mit der größern enthalten seyn könnte? K. Drey Mahl. Und wie glaubt ihr, daß sich überhaupt Prismen von gleichen Höhen zu einander verhalten mögen? K. Wie ihre Grundflächen.

L. Das ist richtig. Wie viel Cubikzolle muß demnach das größere Prisma da enthalten, da deren das kleinere vier enthält? K. Acht.

L. Zählt und seht, ob dem so sey. —— Gut! Nun sagt mir, wie oft dieses (auf ehcD Fig. 22. errichtete, zwey Zoll hohe) Prisma, das ich A nenne, in diesem da (das auf ABC Fig. 26. von der nämlichen Höhe errichtet worden ist), welches B heißen soll, enthalten ist. K. Ein und ein Drittel Mahl.

L. Woraus konntet ihr dieses sogleich schließen? K. Daraus, daß die Grundfläche von A $1\frac{1}{3}$ Mahl in der Grundfläche von B enthalten ist, und beyde Körper gleiche Höhen haben.

L. Jetzt sagt mir zusammen genommen, wie sich zwey prismatische Körper bey gleichen Grundflächen und verschiedenen Höhen, dann bey verschiedenen Grundflächen und gleichen Höhen zu einander verhalten. K. Prismatische Körper verhalten sich zu einander wie die

Höhen, wenn die Grundflächen gleich sind, und wie die Grundflächen, wenn die Höhen gleich sind *).

Acht und zwanzigster Satz.

Zusatz *a.*

L. Wie mögen sich wohl zwey Cylinder, die, wie ihr wißt, auch Prismen sind, zu einander verhalten, wenn sie gleiche Grundflächen haben? K. Wie ihre Höhen.

L. Und

*) Hier ist der Beweiß für die Allgemeingültigkeit dieses Satzes:

Es heisse ein Prisma P, seine Grundfläche G und seine Höhe H; ein anderes Prisma heisse p, seine Grundfläche g und seine Höhe h: so ist

$$P = G \times H$$
$$p = g \times h$$

Folglich $P : p = G \times H : g \times h$.

Nimmt man nun an, daß die Grundflächen in beyden gleich seyn sollen, d. ih. $G = g$, so kann man in der vorigen Proportion statt g den Buchstaben G setzen und daher diese Proportion also ausdrükken:

$$P : p = G \times H : G \times h$$

$$P : p = \frac{G \times H}{G} : \frac{G \times h}{G}$$

d. i. $P : p = H : h$.

Sind

L. Und wie, wenn sie gleiche Höhen haben? K. Wie ihre Grundflächen.

L. Richtig! Was sind denn die Grundflächen der Cylinder für Figuren? K. Kreise.

L. Und wie verhalten sich diese zu einander? K. Wie die Quadrate oder Quadratzahlen ihrer Durchmesser.

L. Daher können wir auch sagen: Cylinder von gleicher Höhe verhalten sich zu einander, wie die Quadrate (Quadratzahlen) ihrer Durchmesser. Da ihr dieses wißt, so werdet ihr mir gleich sagen können, welche Zahlen ihr nur suchen dürft, um zu erfahren, wie sich diese zwey Cylinder von gleicher Höhe (No. 15 + 17. und No. 15 allein) zu einander verhalten. K. Wie die Quadratzahlen ihrer Durchmesser.

L. Sucht diese Zahlen. Dieser Durchmesser hier (zeigend) hält einen, dieser aber (zeigend) zwey Zoll. K. Die Quadratzahl von 1 ist 1, die von 2 aber 4.

L. Wie oft muß demnach dieser kleinere Cylinder da in dem größern enthalten seyn? K. Vier Mahl.

L. Rich-

Sind aber die Höhen in beyden gleich, d. i. H = h, so kann man in der vorigen Proportion statt h den Buchstaben H setzen. Folglich

$$P : p = G \times H : g \times H.$$

$$P : p = \frac{G \times H}{H} : \frac{g \times H}{H}$$

d. i. $P : p = G : g$.

L. Richtig! denn die Quadratzahl des Durchmessers seiner Grundfläche ist ja in der Quadratzahl des Durchmessers der Grundfläche des größern vier Mahl enthalten. Daß aber der Raum, den dieser größere Cylinder (No. 17 + 15) einnimmt, wirklich vier Mahl so groß sey als derjenige, welchen dieser da (No. 15) einnimmt, will ich euch jetzt zeigen.

Man halte mit einem Kartenblatte die eine Oeffnung des hohlen Cylinders No. 17. zu, fülle die ganze Röhre mit Sand und schütte diesen dann in No. 18. Wenn man dieß vier Mahl mit der nöthigen Accuratesse wiederhohlt, so wird dieser Cylinder (No. 18) gerade davon voll werden.

L. Nun sagt mir, ob ich also schließen darf: Wenn von zwey Cylindern von gleicher Höhe der Durchmesser des einen — so kann ich auch sprechen, anstatt: der Durchmesser der Grundfläche des einen — noch ein Mahl so groß ist, als der Durchmesser des andern; so ist der mit dem größern Durchmesser gerade noch ein Mahl so groß als der mit dem kleinern. K. Nein, so darf man nicht schließen.

L. Warum denn nicht? K. Weil sich Cylinder von gleicher Höhe nicht wie die Durchmesser ihrer Grundflächen, sondern wie die Quadratzahlen dieser Durchmesser zu einander verhalten.

L. Ganz recht! Gesetzt also, der Durchmesser dieses Cylinders (No. 17) wäre drey Mahl so groß, als der Durchmesser dieses kleinern Cylinders (No. 16), wie oft müßte dann der kleinere in dem größern enthalten seyn? K. Neun Mahl:

L. Ihr

L. Ihr habt Recht, und seyd jetzt im Stande, das Verhältniß, worin zwey Cylinder von gleichen Höhen zu einander stehen, zu finden, ohne gerade ihre Grundflächen auszurechnen.

Neun und zwanzigster Satz.

Zusatz *b.*

L. Da ihr schon wißt, daß sich die Hälften, Drittel, Viertel ꝛc. gerade so zu einander verhalten, wie ihre Ganzen; so könnt ihr mir vielleicht gleich sagen, wie sich Pyramiden von gleichen Höhen zu einander verhalten müssen. K. Wie ihre Grundflächen.

L. Wie werden sich aber diese Körper zu einander verhalten, wenn sie gleiche Grundflächen haben? K. Wie ihre Höhen.

L. Aus welchem Grunde behauptet ihr dieses? K. Weil eine Pyramide immer das Drittel von einem Prisma ist, welches mit ihr gleiche Höhe und Grundfläche hat, und sich die Prismen von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen, und die von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen zu einander verhalten.

L. Gut! Ihr dürft nur, wenn ihr zwey Pyramiden mit einander vergleichen sollt, um ihr Verhältniß zu einander zu finden, denken, ihr hättet von zwey Prismen, wovon jedes mit einer der vorgelegten Pyramiden gleiche Höhe und Grundfläche hätte, die Drittel vor euch. Wie oft mag denn wohl

wohl diese Pyramide hier (No. 22. ergreifend) in dieser da (No. 21.) enthalten seyn, da beyde gleiche Höhen haben, die Grundfläche der erstern aber (No. 22) halb so groß als die Grundfläche der letztern ist? K. Zwey Mahl.

L. Nach welchem Satze könnt ihr dieses behaupten? K. Nach diesem: Pyramiden von gleichen Höhen verhalten sich 2c.

L. Wie oft wird demnach diese Pyramide (No. 25) in dieser hier (No. 27) enthalten seyn, da beyde ebenfalls gleiche Höhe haben, die Grundfläche der letztern aber ein Quadrat ist, dessen Seite gleich ist der Diagonale von demjenigen Quadrate, welches die Grundfläche der erstern ausmacht? K. Auch zwey Mahl.

L. Wie könnt ihr dieses wissen, da ich nicht gesagt habe, wie sich beyder Körper Grundflächen zu einander verhalten? K. Sie haben aber gesagt, daß beyder Grundflächen Quadrate sind, und daß die Seite der einen dieser Figuren gleich ist der Diagonale der andern. Und hieraus folgt, daß die größere derselben gerade doppelt so groß als die kleinere ist.

L. Und hieraus schließt ihr ferner, und zwar mit Recht, daß die kleinere dieser Pyramiden in der großern zwey Mahl enthalten ist. Daß die Erfahrung dieses bestätige, will ich euch jetzt zeigen.

No. 25. wird zwei Mahl mit Sand gefüllt und in No. 27. ausgeleert.

L. Wie werden sich denn aber diese zwey Pyramiden, (No. 25. und 28.) die gleiche Grundflächen

chen haben, zu einander verhalten? K. Wie ihre Höhen.

L. Diese da (No. 28 ergreifend) ist zwey Mahl so hoch als diese hier (No. 25): was folgert ihr hieraus? K. Daß diese (No. 28) an körperlichem Inhalte zwey Mahl so viel als diese (No. 25) betragen müsse.

L. Ihr habt richtig geschlossen und ihr sollt jetzt sehen, daß ich wirklich in die höhere zwey Mahl so viel Sand füllen kann, als in die niedrigere.

No. 25. wird zwey Mahl mit Sand gefüllt und in No. 28. ausgeleert.

Dreyßigster Satz.

Zusatz c.

L. Da Kegel nichts anders als Pyramiden sind, so werdet ihr mir gleich sagen, wie sich zwey Kegel von gleichen Höhen zu einander verhalten. K. Wie ihre Grundflächen.

L. Könnt ihr, da die Grundflächen der Kegel Kreise sind, und diese sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser zu einander verhalten, nicht sagen, wie sich Kegel von gleichen Höhen, zn einander verhalten, ohne ihre Grundflächen mit in die Proportion zü bringen? K. Ja, wir dürfen nur sagen: Kegel von gleichen Höhen verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser ihrer Grundflächen.

L. Recht

L. Recht so! Es ist hier derselbe Fall, wie bey den Cylindern. Wenn wir also erfahren wollen, wie sich zwey Kegel von gleichen Höhen zu einander verhalten, was dürfen wir da ebenfalls nur für Zahlen suchen? K. Die Quadratzahlen der Durchmesser ihrer Grundflächen.

L. Der Durchmesser der Grundfläche dieses Kegels (No. 30) ist zwey Zoll lang, hingegen dieses (No. 31) Kegels Grundfläche hält im Durchmesser nur einen Zoll, übrigens haben beyde Körper einerley Höhe. Nun sagt mir geschwind, wie viel solche kleine Kegel (auf No. 31. zeigend) ich aus diesem da (No. 30) machen könnte, wenn sich dieses Holz etwa wie Wachs behandeln ließe. K. Vier.

L. Wie habt ihr diese Antwort gefunden? K. Wir haben gedacht: Weil sich Kegel von gleichen Höhen wie die Quadratzahlen der Durchmesser ihrer Grundflächen zu einander verhalten, und die Quadratzahl des Durchmessers der Grundfläche dieses größern Kegels vier Mahl so groß ist, als die Quadratzahl des Durchmessers des kleinern; so muß auch dieser größere Kegel vier solche kleinere geben.

L. Da habt ihr aber Mahls richtig geschlossen, und ihr werdet mir nun auch sagen können, wie viel solche Kegel (No. 31. ergreifend) dieser da (No. 30) enthalten würde, wenn der Durchmesser seiner Grundfläche 4 Zoll enthielte. K. Dann würde er 16 solche (No. 31) enthalten.

Ein

Ein und dreyßigster Satz.

Lehrsatz.

L. (, welcher No. 17 + 15 dann No. 18 und 33 vor sich hat.) Der Durchmesser dieses Cylinders (No. 17. + 15) sowohl als seine Höhe beträgt, wie ihr schon wißt, zwey Zoll. Jetzt lege ich diese Kugel (No. 33) in diesen hohlen Cylinder (No. 18) welcher mit diesem hölzernen einerley ist, und finde, daß sie ringsum an seinen Wänden anliegt. Was folgt hieraus in Ansehung der Länge ihres Durchmessers? K. Daß er auch zwey Zoll halten müsse.

L. Gut! Welcher Größe muß demnach die Höhe und der Durchmesser dieses Cylinders (No. 17 + 15) gleich seyn? K. Dem Durchmesser dieser Kugel.

L. Drükkt mir nun in einem zusammen hängenden Satze aus, was euch jetzt bekannt geworden ist. K. Sowohl die Höhe als der Durchmesser dieses Cylinders (zeigend) ist gleich dem Durchmesser dieser Kugel (zeigen).

L. Nun merkt einen sehr wichtigen Satz. Wenn ein Cylinder und eine Kugel in dem jetzt von euch angegebenen Punkte mit einander übereinstimmen; so enthält alle Mahl die Kugel zwey Drittel von dem Cylinder. Den Beweis für die Wahrheit dieses Satzes kann ich euch nicht vortragen *), weil ich

*) Für den Lehrer, welcher diesen Beweis etwa bey der Hand haben möchte, steht er hier: Es werden aber bey

ich befürchte ihr möchtet ihn nicht verstehen; aber durch eine sinnliche Anschauung will ich jetzt dieselbe bestätigen.

Man

---

bey demselben folgende Sätze als ausgemacht vorausgesetzt:

1) Wenn man eine Kugel mit einer Ebene durchschneidet, so entsteht alle Mahl ein Kreis. Geht der Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel, so theilt er diese in zwey gleiche Theile und der dadurch entstehende Kreis heißt der Kugel größter Kreis, weil er größer ist, als jeder andere, der durch irgend einen, aber nicht durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden, Schnitt auf ihr gemacht werden könnte. Wenn man nun eine Halbkugel parallel mit der Fläche des größten Kreises schneidet und sie durch diese Schnitte in lauter Scheiben von undenklich kleiner Höhe zerlegt; so kann man sich diese Scheiben als Cylinder vorstellen, weil die Durchmesser ihrer beyden parallelen Grundflächen nur unmerklich von einander unterschieden sind. 2) Jeder Schnitt eines Cylinders mit einer Ebene, der Grundfläche parallel, ist ein der Grundfläche gleicher Kreis. 3) Jeder Schnitt eines Kegels mit einer Ebene, der Grundfläche parallel, ist ein Kreis.

Wenn B N C F (Fig. 21. a T. II.) ein Quadrat, B N F ein Quadrant (vierte Theil eines Kreises) und B N C ein rechtwinkliger Triangel ist, und man annimmt, daß sich diese drey Figuren um die gemeinschaftliche Seite N B ganz herum bewegen; so muß durch die Bewegung des Quadrats ein Cylinder, durch die Bewegung des Quadranten eine Halbkugel, und durch die Bewegung des rechtwinkligen Triangels ein auf seiner Spitze stehender Kegel entstehen. Da alle diese drey Körper B N. zur Höhe haben, diese also bey allen drey-

en

Man stelle hier den Cylinder No. 18. mit seinem gesäumten (umgebogenen) Rande auf den Tisch, lege die Kugel No. 33. hinein und fülle den Raum, den sie oben leer läßt gehörig mit Sand aus. Nun drükke man den Dekkel fest darauf, wende den Cylinder mit Vorsicht um, und stelle ihn auf die Grundfläche, die der Boden des Dekkels bildet, und fülle

auch

---

en gleich ist; so erhellet, daß aus allen dreyen auch gleich viel Scheiben können geschnitten werden, wenn man diesen gleiche Höhe oder Dikke giebt. Wenn wir nun annehmen, daß sowohl der Cylinder, als auch der Kegel und die Halbkugel parallel mit den Grundflächen durchschnitten würden, und die Schnitte die möglich kleinste Entfernung von einander hätten; so muß nicht nur der Cylinder sondern auch der Kegel und die Halbkugel dadurch in lauter kleine Cylinder von einerley Höhe, d. i. in cylindrische Scheiben von gleicher Dikke zerlegt werden, und die Anzahl dieser Scheiben muß bey den 3 Körpern gleich groß seyn. Es sei nun P S parallel mit B F und folglich auch mit N C *); so stellet P Q den Halbmesser eines Durchschnitts im Kegel, P G den Halbmesser eines Durchschnitts in der Halbkugel und P S den Halbmesser eines Durchschnitts im Cylinder vor. Vergleicht man nun die Quadrate dieser drey Linien mit einander, so erfährt man dadurch, wie sich die kleinen Cylinder, deren Halbmesser sie vorstellen, zu einander verhalten.

Es

*) Nach dem Satze: Eine Linie, welche parallel mit einer von zwey Parallelen ist, ist es auch mit der andern. N C und B F sind aber parallel als Seiten eines Parallelogramms.

auch den in der andern Hälfte leer gelaßnen Raum mit Sand aus, und fahre etwa folgendermassen fort:

L. Der

Es ist aber

PS = BF (Satz 33. des 2ten Buchs)

BF = BG (vid. p. 187 des ersten Bdchs.)

Folglich PS = BG (2ter Grundsſ. p. 176. d. erst. B.)

Und daher das Quadrat von PS = dem Quadrate von BG.

Ferner, weil PQ parallel mit NG

so folgt, daß BN : NC = PB : PQ (Satz 73. des 2n Bchs)

BN = NG als Seiten eines Quadrates.

Folglich auch PB = PQ.

Und daher PBq = PQq.

Da nun BNC als Winkel eines Quadrats ein rechter Winkel ist, so muß auch BPG ein rechter Winkel seyn. Folglich in dem rechtwinkligen Triangel BGP

BGq = BPq + BGq (Satz 46)

BGq = PSq und BPq = BQq (nach dem vorherg. Bew.)

also PSq = PQq + PGq. *)

Weil sich nun Cylinder von einerlei Höhe wie die Quadrate ihrer Durch- oder Halbmesser verhalten; so müssen die beyden kleinern Cylinder, deren Halbmesser PQ und PG sind, d. i. ein Theil des Kegels und ein Theil der Halbkugel, zusammen genommen einem Theile des Cylinders, welcher eben die Höhe und zum Halbmesser

*) Nach dem Satze: jede Größe ist sich selbst gleich und statt der einen kann man alle Mahl eine andere setzen, die ihr gleich ist.

L. Der in dieser Büchse (diesem Cylinder) befindliche Sand bildet nun nebst der gleichfalls darin befindlichen Kugel einen Cylinder, welcher mit diesem da (No. 17 + 15) ganz einerley ist. Gesetzt nun, ich nähme die Kugel heraus, und der mit ihr darin befindliche Sand füllte dann nur ein Drittel der Büchse aus, wie viel müßte denn da die Kugel davon ausgefüllt haben? K. Zwei Drittel.

L. Allerdings! Ich will nun die Kugel wirklich herausnehmen und dann sehen, wie viel Raum der Sand allein darin einnimmt.

Die Kugel wird nun wieder aus dem hohlen Cylinder herausgenommen, der Sand, welcher bei

dieser

messer PS hat, nothwendig gleich seyn. Dieser Beweis bleibt aber immer der nämliche, man mag sich die Durchschnitte der 3 Körper näher oder entfernter von der Grundfläche vorstellen, so daß man also behaupten kann: immer und überall ist ein Theil des Kegels nebst einem Theile der Kugel so groß, als ein Theil des Cylinders, vorausgesetzt, daß diese 3 Körper so getheilt worden, wie in diesem Beweise angenommen wird. Es ist aber der Kegel, weil er einerley Grundfläche und Höhe mit dem Cylinder hat, der dritte Theil des Cylinders. Folglich muß die ganze Halbkugel 2/3 von dem Cylinder enthalten, dessen Diameter MF dem Diameter der Halbkugel, und dessen Höhe NB dem Halbmesser derselben gleich ist. Und da sich die Ganzen wie ihre Hälften zu einander verhalten; so muß die ganze Kugel 2/3 von einem Cylinder seyn, dessen Höhe noch einmal so groß als die Höhe des vorigen, d. h. dessen Höhe und Diameter dem Diameter der Kugel gleich ist.

dieser Gelegenheit mit heraus fällt, wird auf einem Blatte Papier aufgefangen, wieder hineingethan, und so lange gerüttelt, bis er eine ebene Oberfläche hat.

Hierauf wird der kleine Maßstab, No. 2. der auf der einen Seite in 3 gleiche Theile abgetheilt ist, auf den Sand gestellt, wo er dann gerade um ein Drittel über den Cylinder hervor ragen wird.

L. Da seht dieser kleine Maßstab, der gerade die Länge dieses Cylinders hat, ragt gerade um ein Drittel über denselben heraus, wenn ich ihn auf den darin befindlichen Sand stelle. Dieser muß also den dritten Theil des Cylinders ausfüllen und folglich mußte vorhin die Kugel $\frac{2}{3}$ davon eingenommen haben. Diese Anschauung bestätigt also die Wahrheit des vorhin von mir ausgesprochenen Satzes, den ich jetzt von euch zu hören wünsche. Wie lautet er? K. Eine Kugel enthält allemal zwey Drittel von einem Cylinder, dessen Höhe und Durchmesser ihrem (der Kugel) Durchmesser gleich ist.

L. Könnt ihr mir denn auch sagen, auf welche Art ich euch diese Wahrheit bestätigt habe? K. (beschreiben den vorhin gemachten Versuch.)

L, Jetzt sollt ihr den nämlichen Versuch auch selbst machen. K. (thun dieß.)

L. Wer sagt mir nun, den wie vielsten Theil von dieser Kugel (No. 33.) dieser Kegel (No. 30.) ausmachen muß, da er, wie ihr letzthin gesehen habt, das Drittel von diesem Cylinder (No. 17+15) ist? K. Gerade die Hälfte.

L. Wie

L. Wie wollt ihr dieses beweisen? K. Da die Kugel zwey und der Kegel ein Drittel von dem Cylinder in sich faßt, so muß ja offenbar die erstere noch einmal so groß als der letztere seyn.

L. Ihr habt Recht und wir können sagen: Diese drey Körper, nämlich Cylinder, Kugel und Kegel verhalten sich zu einander, wie 3. 2 und 1 d. h. wenn in den Cylinder da No. 17 + 15 in 3 gleiche Theile theile, so sind zwey davon zusammen genommen so groß, als diese Kugel, einer allein aber hat die Größe des Kegels. Und wiederum: dieser Kegel ist halb so groß als diese Kugel, Kugel und Kegel zusammen aber sind gleich diesem Cylinder. Dieß alles aber kann nur unter gewissen Bedingungen der Fall seyn. Sagt mir unter welchen. K. Wenn sowohl die Höhe als der Durchmesser des Cylinders gleich ist dem Durchmesser der Kugel, und der Kegel mit dem Cylinder einerley Grundfläche und Höhe hat.

L. Aber unter welchen Bedingungen wird ein Kegel halb so groß als eine gegebene Kugel seyn? K. Wenn sowohl der Durchmesser seiner Grundfläche als seine Höhe gleich ist dem Durchmesser der gegebenen Kugel.

L. Richtig! Da ihr nun dieses wißt, so werdet ihr mir folgende Fragen leicht beantworten können: Wie verhält sich diese Halbkugel (No. 34 a.) zu diesem Kegel (No. 30)? K. (nachdem der Durchmesser der Halbkngel gemessen worden:) Sie ist gerade so groß als dieser Kegel.

 L. Aus

L. Aus welchem Grunde läßt sich dieß behaupten? K. Weil sowohl die Höhe als der Durchmesser der Grundfläche dieses Kegels gleich ist dem Durchmesser der Kugel, wovon dieß (No. 34 a) die Hälfte ist.

L. Richtig! Wie groß muß denn der Durchmesser der Grundfläche eines Kegels und seine Höhe seyn, wenn er die Hälfte von einer Kugel ausmachen soll, deren Durchmessee 18 Zoll hält? K. Auch 18 Zoll groß.

L. Jemand hat eine goldene Halbkugel, deren Durchmesser 5 Zoll mißt; ein andrer hat von dem nämlichen Golde einen Kegel, der 5 Zoll hoch ist und eine Grundfläche hat, die im Durchmesser eben so viel hält: Welcher von beyden hat nun mehr Gold? K. Der eine hat so viel als der andere.

L. Warum behauptet ihr dieß? K. Weil ein Kegel, welcher den Durchmesser einer Kugel zu seiner Höhe und zugleich zum Durchmesser seiner Grundfläche hat, halb so droß als diese Kugel oder der Hälfte dieser Kugel gleich ist.

L. Gut! Ein gewisser metallner Cylinder, welcher eben so hoch als dikk ist, (dessen Höhe so viel als sein Durchmesser beträgt), wiegt 28 ℔: wie viel wird nun eine Kugel von dem nämlichen Metalle wiegen, deren Durchmesser gleich ist der Höhe dieses Cylinders? K. $18\frac{2}{3}$ ℔.

L. Warum glaubt ihr dieß? K. Weil diese Kugel unter den angegebenen Bedingungen $\frac{2}{3}$ von dem Cylinder seyn muß.

L. Ge-

L. Gesetzt, diese Kugel (No. 33) und dieser Kegel (No. 30) wären von Bley und wögen zusammen $4\frac{1}{2}$ ℔, wie viel müßte dann ein bleyerner Cylinder von dieser Größe (No. 17 + 15. vorlegend) wiegen? K. Eben so viel?

L. Warum? K. Weil diese Kugel und dieser Kegel zusammen genommen gerade so groß als dieser Cylinder sind.

Zwey und dreyßigster Satz.

Aufgabe.

L. Wißt ihr schon, wie viel der körperliche Inhalt dieser Kugel (No. 33) beträgt? K. Nein.

L. Wie aber, wenn ihr geschwind diesen Cylinder (No. 17 + 15) ausrechnet, würdet ihr dann auch nicht im Stande seyn, mir dieß zu sagen? K. O ja.

L. Wie wolltet ihr es denn anfangen, um nach der Ausrechnung dieses Cylinders den Inhalt dieser Kugel zu finden? K. Wir würden $\frac{2}{3}$ von dem Inhalte des Cylinders nehmen.

L. Und warum würdet ihr auf diese Weise dieser Kugel Inhalt zu finden suchen? K. Weil sie gerade $\frac{2}{3}$ von dem Cylinder ausmacht.

L. Nun seyd ihr wohl im Stande, mir zu sagen, wie man überhaupt den körperlichen Inhalt einer Kugel findet. K. Diesen findet man, wenn man einen Cylinder, dessen Höhe

und

und Durchmesser dem Durchmesser der auszurechneden Kugel gleich ist, ausrechnet, und von seinem Inhalte $\frac{2}{3}$ nimmt.

L. Das ist recht. Nun rechnet vor allem diese Kugel hier (No. 33) deren Durchmesser, wie ihr schon wißt, 2 Zoll hält, aus. K. (stellen folgende Rechnungen an:

$$100 : 314 = 2'' : \textit{Periph.}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 100)\ 628 \mid 6\tfrac{28}{100} = 6'',\ 2'''\ 8''''\ \textit{Periph.} \end{array}$$

der Grundfläche des jetzt angenommenen Cylinders.

$$\begin{array}{l} 628''''\ \textit{Periph.} \\ \underline{\ \ 50''''\ \tfrac{1}{4}}\ \text{des Durchmessers} \\ 31400\square'''' = 3\square'',\ 14\square'''\ \text{Grundfläche des} \\ \qquad\qquad\qquad \text{angenommenen Cylinders.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 314\square'''\ \text{Grundfläche} \\ \underline{\ \ 20'''}\ \text{Höhe des Cylinders} \\ 6280c'''\ \text{Inhalt des Cylinders, dessen Höhe und} \\ \qquad\qquad\qquad \text{Durchmesser} = 2''\ \text{ist.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l} 3 & 6280 & 2093\tfrac{1}{3}c'''\ \text{Drittel des Cylinders.} \\ & 6 & \\ \hline & 28 & \\ & 27 & \\ \hline & 10 & \\ & 9 & \\ \hline & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{2093\tfrac{1}{3}} \\ 4186\tfrac{2}{3}\ c''' = 4c''\ \ 186\tfrac{2}{3}\ c'''\ \tfrac{2}{3}\ \text{des Cylinders,} \end{array}$$

also der Inhalt der vorgelegten Kugel.

L. Nach

L. Nach dieser Rechnung hält also diese Kugel $4^{c''}$ und $186\frac{2}{3}{}^{c'}$. Wir könnten demnach, wenn sie von Wachs wäre, 4 solche Würfel (No. 10) aus ihr gießen und würden dann noch etwas übrig behalten. Jetzt rechnet mir doch auch aus, wie viel der körperliche Inhalt einer Kugel betrüge, deren Durchmesser gerade 100 Zoll hielte, sagt aber immer dabey, was ihr thut. K. Um den Inhalt der Kugel von dem erst gegebenen Durchmesser zu finden, rechnen wir erst einen Cylinder aus, dessen Höhe und Durchmesser dem Durchmesser der gegebenen Kugel gleich ist. Der Umfang der Grundfläche dieses Cylinders muß gerade 314 Zoll halten, da ihr Durchmesser 100 Zoll lang ist. Dieser Umfang mit dem 4ten Theil des Durchmessers multiplicirt giebt:

$$\begin{array}{r} 314'' \\ 25'' \\ \hline 1570 \\ 628 \\ \hline 7850 \end{array}$$

$7850\square'' = 78\square', 50\square''$ als den Inhalt der Grundfläche. Diese mit der Höhe multiplicirt giebt:

$$\begin{array}{r} 7850 \\ 100 \\ \hline 785000 \end{array}$$

$785000\,c''$ als den Inhalt des Cylind.

Dieser Inhalt wird nun mit 3 dividirt und der Quotient alsdann zwey Mahl genommen, wie folgt:

3|785000

3 | 785000 | 261666 $\frac{2}{3}$ c''
   6 | 2
—
18 | 523332 $\frac{4}{3}$ = 523333 $\frac{1}{3}$ c'' =
18 | 523 c', 333 $\frac{1}{3}$ c'' der
—
5 | Kugel Inhalt.
3
—
20
18
—
20
18
—
20
18
—
2

f. Der Umfang einer Kugel ist immer eine Kreislinie. So sind z. B. hier an dieser Kugel (No. 33) die zwey eingeschnittenen krummen Linien, Kreislinien, die der Kugel Umfang darstellen. Zerschneide ich die Kugel nach einer solchen Linie, wie dieß hier (No. 34) geschehen ist; so ist jede Durchschnittsfläche ein Kreis, dessen Durchmesser der Kugel Durchmesser und dessen Peripherie zugleich der Kugel Umfang ist. Ein solcher Kreis heißt immer ein größter Kreis der Kugel. Daher ist es einerley, ob ich sage: sucht mir die Peripherie dieses Kreises (auf die Durchschnittsfläche von No. 34. *a* zeigend), oder ob ich spreche: sucht mir den Umfang dieser Kugel (die zwey Halbkugeln No. 34. an einander gelegt vorzeigend). In beyden Fällen ist eine und die nämliche Kreislinie auszurechnen. Nun wollen wir annehmen, diese Kugel (No. 33)

(No. 33) habe einen Durchmesser von 100 Zoll; wie viel wird dann wohl ihr Umfang betragen müssen? K. 314 Zoll.

L. Recht! Diese Linie (eine der Umfangslinien an No. 33. zeigend) würde im angenommenen Falle 314 Zoll halten. Jetzt sucht mir die Quadratzahl des Durchmessers dieser von uns angenommenen Kugel. K. Diese macht 100 × 100 = 10000.

L. Mit dieser Quadratzahl multiplicirt den Umfang dieser Kugel. K. Das macht 3140000.

L. Dieses Produkt dividirt jetzt mit 6. K. rechnen:

```
6 |3140000|523333 2/6 = 523333 1/3
  |30
  ---
   14
   12
   ---
    20
    18
    ---
     20
     18
     ---
      20
      18
      ---
       2
```

L. Ihr seht, daß wir durch das jetzt angewandte Verfahren die nämliche Zahl gefunden haben, die wir vorhin fanden, als wir den Inhalt einer angenommenen Kugel von 100 Zoll im Durchmesser suchten. Und hieraus erhellet, daß es noch eine andere als die vorhin beygebrachte, Regel giebt,

nach

nach der man den körperlichen Inhalt einer Kugel finden kann. Wer sich besinnt, wie wir das letzte Mahl die Zahl $523333\frac{1}{3}$ gefunden haben, der kann mir gewiß diese Regel sagen. K. Man muß die Quadratzahl des Durchmessers der auszurechnenden Kugel mit ihrer Peripherie multipliciren und das dadurch erhaltene Produkt mit 6 dividiren.

L. Das ist recht! wie man auf diese Regel gekommen ist, und wie sie mit der von euch zuerst gefundenen zusammen hängt, kann euch erst in der Folge gezeigt werden, wenn ihr mit der Buchstabenrechnung (der allgemeinen Rechenkunst) bekannt seyn werdet. *)

Nun

*) Wer fähige Schüler hat, welche die allgemeine arithmetischen Ausdrükke schon verstehen, der schreibe folgende Rechnung an die schwarze Tafel:

$$\begin{array}{l} 314\ p \\ \underline{\ \ 25\tfrac{1}{4}\ d} \\ 1570 \\ \underline{628} \\ 7850\tfrac{1}{4}\ pd \\ \underline{\ \ \ 100\ d} \\ 785000\tfrac{1}{4}\ pdd = \tfrac{1}{4}\ pd^2. \end{array}$$

$$\frac{785000}{3} = \frac{26166\frac{2}{3}}{4}\ \frac{1}{3}\ pd^2 = \frac{1}{12}\ pd^2.$$

$523333\frac{1}{3}\ \frac{2}{12}\ pd^2 = \frac{1}{6}\ pd^2$ und spreche etwa: dieß ist die nämliche Rechnung, die ihr vorhin gemacht habt, nur habe ich noch einige Zeichen hinzugefügt,

Nun aber wollen wir uns im Ausrechnen des körperlichen Inhalts gegebener Kugeln üben und dabey immer die zuletzt gegebene Regel befolgen.

Der

fügt, die ich euch nun nach und nach erklären will. Der Buchstabe p bedeütet Peripherie und der Buchstabe d soll Diameter heißen: Indem ihr nun 314 als die Peripherie eines Kreises mit 25, dem Viertel seines Diameters, multiplicirtet, so bekamt ihr in dem Produkte 7850 den vierten Theil von p d d. h. das Viertel von dem Produkte, welches die Peripherie, multiplicirt mit dem Diameter, giebt. Daher habe ich hineingesetzt: 1/4 p d. Unter p und d können wir uns aber hier sowohl die Peripherie und den Diameter der auszurechnenden Kugel, als auch der Grundfläche des Cylinders, von dem die Kugel 2/3 macht, vorstellen. Als ihr hernach wieder mit 100, der Höhe des angenommenen Cylinders, multiplicirtet, so war es eben so viel, als wenn ihr noch ein Mahl mit dem Diameter multiplicirt hättet, weswegen ich das Produkt 1/4 p d d oder 1/4 p d^2 d. h. das Viertel des durch die Multiplication der Peripherie mit dem Quadrate des Durchmessers entstandenen Produkts nannte. Indem ihr nachher dieses 1/4 p d^2 mit 3 dividirtet, so enthielt der Quotient (= 261666 2/3) $\frac{\frac{1}{3}}{4}$ p d^2 = 1/12 p d^2 oder: die Zahl 261666 2/3 war das zwölftel von dem Vorducte, welches entstand, indem wir die Peripherie eines Kreises welche = 314 Zoll war, mit 10000, der Quadratzahl des Durchmessers dieses Kreises, multiplicirten. Und da ihr ferner die Zahl 261666 2/3 zwey Mahl nahmt, so erhieltet ihr zwey 12tel oder ein 6tel von dem Produkte, welches aus 314 × 10000 entstand. Es war demnach

die

Der Umfang unserer Erde beträgt 5400 folglich ihr Durchmesser beynahe 1720 Meilen. Der Bequemlichkeit wegen wird letzterer angenommen = 1720 Meilen. Nun rechnet aus, wie groß der körperliche Inhalt unserer Erdkugel seyn muß. K. (rechnen:)

```
       1720
       1720
      -----
      34400
     12040
     1720
     -------
     2958400  Quadratzahl des Durchm.
                              der Erde.
        5400  Peripherie der Erde.
   ----------
   1183360000
   14762000
   -----------
6 |15975360000|2662560000 Cubikmeil.
  |12.....    |      der Erde Inhalt
  --------
   39....
   37...
    15..
     33.
     36
```

L. Jetzt

die Zahl 523333 1/3 der sechste Theil aus dem Produkte, welches die Peripherie eines gewissen Kreises multiplicirt mit der Quadratzahl des Durchmessers dieses Kreises gab. Durch diese und ähnliche Betrachtungen fand man denn, daß wenn man einen Cylinder, dessen Höhe

und

L. Jetzt rechnet doch ein Mahl aus, wie groß der Mond seyn muß, da sein Durchmesser 468 Meilen beträgt. K. (suchen erst die Peripherie indem sie rechnen:)

```
100: — 314 = 468
        468
       ----
       2512
      1884
     -------
100. | 1469|52 = 1469 52/100 Meilen die Periph.
```

L. Da nach dieser Rechnung weniger als eine halbe Meile zu 1470 Meilen fehlt, so nimmt man diese Zahl von Meilen zur Periph. des Mondes an. Ihr habt also jetzt mit dieser Zahl die Quadratzahl des Durchmessers zu multipliciren. K. (rechnen:

468

und Durchmesser einerley ist mit einer gegebenen Kugel A, ausrechnet und von seinem Inhalte den dritten Theil nimmt, man im Grunde nichts anders thut, als wenn man die Peripherie der Kugel A mit der Quadratzahl ihres Durchmessers multiplicirt, und dieses Produkt mit 6 dividirt. Und dadurch ist man auf die vorhin angegebene 2te Regel zur Auffindung des körperlichen Inhalts einer Kugel gekommen.

```
      468
      468
    ------
     3744
    2808
   1872
   ------
   219024 Quadrat des Diameters.
     1470 Periph.
 ---------
  15331680
  876096
  219024
 ---------
6. | 321965280|53,660,880 Cubikmeilen. Inhalt
   | 21                     des Monds, bey dem
   ----                     angenommenen Durchmesser.
    39
    36
    --
     52
     48
     --
      0
```

L. Wenn die ganze Oberfläche dieser Kugel (No. 33) in noch weit kleinere solche Vierekke, als diese hier (auf den No. 33. aufgeleimten Papierstreifen zeigend) sind, zertheilt wäre; so würde die Krümmung (Wölbung) eines jeden dieser Theile so unbedeutend seyn, daß man sie alle für ebene Flächen halten könnte. In so außerordentlich kleine Vierekke wollen wir uns jetzt die ganze Oberfläche dieser Kugel eingetheilt und zugleich von den Ekken dieser

dieser Vierekke bis an den Mittelpunkt dieser Kugel Linien, so wie hier (No. 42 vorzeigend) gezogen denken, um in uns die Vorstellung zu erzeügen, als bestünde sie (diese Kugel) aus lauter kleinen Pyramiden. Gesetzt nun, wir dächten uns diese (zeigend) Kugelfläche in 10000 so kleine Vierekke abgetheilt, aus wie viel kleinen Pyramiden könnten wir uns denn diese Kugel zusammengesetzt vorstellen? K. Aus 10000.

L. Und welche Linie möchte denn wohl die Höhe einer jeden dieser Pyramiden anzeigen? K. Der Halbmesser der Kugel.

L. Wenn wir nun wüßten, wie groß diese 10000 Pyramiden zusammen genommen wären, wäre uns dann der körperliche Inhalt der Kugel noch unbekannt? K. Nein.

L. Was dürften wir also nur ausrechnen, um gleichfalls den Inhalt dieser Kugel zu finden? K. Die 10000 kleinen Pyramiden, aus denen wir sie uns zusammengesetzt denken.

L. Wie findet man aber den Inhalt von einer Sammlung von Pyramiden, die alle einerley Höhe haben? K. Wenn man ihre Grundflächen alle addirt, diese Summe mit der Höhe multiplicirt und von diesem Produkte den dritten Theil nimmt.

L. Wir können auch wie ihr schon wißt, sprechen: wenn man die Summe der Grundflächen mit dem dritten Theile der Höhe multiplicirt. Und dieses Ausdrukts wollen wir uns jetzt bedienen.

Wenn

Wenn wir also wüßten, wie groß die Grundflächen der jetzt von uns gedachten 10000 kleinen Pyramiden zusammen genommen wären, d. h. wenn wir wüßten, wie viel die ganze Oberfläche dieser Kugel und auch der dritte Theil ihres Halbmessers betrüge; so würden wir finden können — — nun was denn? K. Den körperlichen Inhalt derselben.

L. Was hätten wir denn mit den erwähnten Größen, ich meine mit der Oberfläche und dem 3ten Theile des Halbmessers dieser Kugel zu thun, wenn wir aus ihnen ihren Inhalt finden wollten? K. Wir müßten sie mit einander multipliciren.

L. Gut! Jetzt sagt mir geschwind noch einmal, wie wir nach unserer jetzigen Behauptung den körperlichen Inhalt dieser Kugel finden könnten. K. Wenn wir ihre Oberfläche mit dem 3ten Theile ihres Halbmessers multiplicirten.

L. Da haben wir also eine dritte Art, den Inhalt einer Kugel auszurechnen. Denn jeder Körper dieses Namens kann als eine Sammlung von Pyramiden gedacht werden, deren Grundflächen zusammen die Oberfläche der Kugel ausmachen, und deren Höhe gleich ist ihrem Halbmesser. Der wievielste Theil vom Durchmesser muß denn das Drittel des Halbmessers seyn? K. Der sechste. L. Wenn ihr dieß bedenkt, so könnt ihr die vorhin gegebene Regel, eine Kugel auszurechnen, noch etwas anders ausdrücken. Wer weiß wohl wie? K. Man muß die Oberfläche der Kugel mit

mit dem 6ten Theil des Durchmessers multipliciren*).

L. Wenn aber diese Regel angewendet werden soll, so muß man natürlich erst die Oberfläche der Kugel berechnen können. Diese findet man aber, wenn man den Durchmesser mit der Peripherie multiplicirt**), von welcher Regel ihr aber den Grund erst in der Folge werdet einsehen können. Jetzt sucht mir geschwind die Oberfläche dieser Kugel (No. 33), rechnet aber laut und sagt dabey immer, was ihr jedesmal thut. K. Zuerst suchen wir aus dem uns bekannten Durchmesser

*) Der Beweis für die Allgemeingültigkeit dieses Satzes ist folgender:

Es heiße ein unendlich kleiner Theil von der Kugel Oberfläche t, die Anzahl derselben n und die Oberfläche der Kugel o, so ist offenbar $t \times n = o$. Der Halbmesser der Kugel und mithin die Höhe der kleinern Pyramiden, aus denen wir uns die Kugel zusammen gesetzt denken, heisse r, so ist der körperliche Inhalt einer solchen Pyramide, weil t ihre Grundfläche bedeutet, $1/3\ r \times t$, und, weil n die Anzahl derselben vorstellt, die Summe aller dieser Pyramiden, folglich der Inhalt der ganzen Kugel.

$1/3\ r \times t \times n = 1/3\ r \times o$, weil $t \times n = o$, der Annahme gemäß, ist. Nennt man nun den Diameter der Kugel d, so ist

$1/3\ r\, o = 1/6\ d\, o.$

**) Auf diese Regel führt folgende Betrachtung: Nach S. 196. wird der Inhalt der Kugel ausgedrückt durch das

messer den Umfang dieser Kugel und rechnen deßhalb wie folgt:

$$100 : 314 = 2'' : \textit{Periph.}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 100|628|6\tfrac{28}{100} = 6'',\ 2''',\ 8'''' \end{array}$$

Nun multipliciren wir

$628''''$ *Periph.*

mit $200''''$, dem *Diam.*

$$12{,}56{,}60 = 12\square''\ 56\square'''$$

L. Diese Rechnung ist richtig. Ihr zu Folge würde also die Oberfläche dieser Kugel, wenn wir sie wie die Schale von einem Erdapfel absondern und vor uns ausbreiten könnten etwas mehr als diese Fläche (12 Würfel von No. 10. neben einander hinlegendausmachen. Jetzt rechnet doch auch aus,

das Produkt $1/6\ p\,d^2$ und nach der vorigen Note durch das Produkt $1/6\ d\,o$. Hieraus folgt, daß weil d in beyden Ausdrücken einerley Bedeutung hat, daß

$$1/6\ p\,d^2 = 1/6\ d\,o.$$

$6 \times 1/6\ p\,d^2 = 6 \times 1/6\ d\,o.$

d. i. $p\,d^2 = d\,o$, weil sich ja die Ganzen wie die Halben, Sechstel ꝛc. zu einander verhalten.

Es ist aber $\frac{p\,d^2}{d} = \frac{d\,o}{d}$

d. h. $p\,d = o$ oder: das Produkt aus der Peripherie und dem Durchmesser giebt die Oberfläche der Kugel an.

aus, wie viel Quadratmeilen die Oberfläche unserer Erde beträgt. K. (rechnen:

1720 *Diam.*
5400

688000
8600

9288000 Quadratmeilen der Erde Oberfl.

L. Jetzt wollen wir auch des Mondes Oberfläche suchen. K. (rechnen:

468 Diameter.
1470 Peripherie.

32760
1872
468

687960 □Meilen Oberfläche des Mondes.

L. Jetzt sagt mir auch, wie ein Vergolder erfahren kann, wie viel Quadratzoll Gold er zur Vergoldung einer Kugel, welche 5 Zoll im Durchmesser hält, nöthig hat. K. Da muß er eben die Oberfläche dieser Kugel ausrechnen und sehen, wie viel Quadratzolle sie hält.

L. Richtig! Rechnet einmal der erwähnten Kugel Oberfläche aus. K. rechnen:

$100 : 314 = 5'' : P.$
5

$100 \mid 1570 \mid 15\frac{78}{100} = 15''\ 7'''$ Periph.

$157'''$ Peripherie.
$50'''$ Diameter.

$7850\,\square''' = 78\,\square'',\ 50\,\square'''$ Oberfläche der Kugel.

Drey und dreyßigster Satz.

Zusatz.

Die Durchschnittsflächen dieser Halbkugeln (No. 34.) sind größte Kreise, wie ihr bereits wißt. Wenn ich nun den Flächen-Inhalt eines solchen Kreises finden wollte, was müßte ich denn da thun? K. Sie müßten seine Peripherie mit dem vierten Theil des Durchmessers multipliciren.

L. Die Peripherie und der Durchmesser eines solchen Kreises ist auch die Peripherie und der Durchmesser dieser Kugel. Folglich kann ich sagen: Das Viertel von dem Produkte aus dem Durchmesser in die Peripherie giebt den Inhalt des größten Kreises dieser Kugel. Was erhalten wir aber, wenn wir das ganze Produkt suchen, das die Peripherie, mit dem Durchmesser multiplicirt, giebt? K. Der Kugel Oberfläche.

L. Wie viel Mahl muß demnach dieser Kugel (No. 34) Oberfläche größer seyn, als einer dieser Kreise (die Durchschnittsfläche zeigend)? K. Vier Mahl*).

L. Richtig! dieß ist aber, wie ihr leicht einsehen werdet, nicht nur bey dieser, sondern bey einer

*) Es ist nicht überflüssig, wenn man sich vier Kreise, wovon jeder gleich ist der Kreisfläche von No. 34. a von Papier ausschneidet und den Kindern sagt, daß die Oberfläche der vorliegenden Kugel diesen 4 Kreisen zusammen genommen gleich sey.

einer jeden Kugel der Fall, weßwegen wir allgemein behaupten können, daß einer Kugel Oberfläche viermal größer sey, als die Fläche ihres größten Kreises. Vier solche Kreisflächen (zeigend) würden also die ganze Kugel (No. 34) bedecken.

Vier und dreyßigster Satz.

Lehrsatz.

L. Wie lang ist denn die Seite dieses Würfels von No. 10? K. Einen Zoll.

L. Gerade so lang ist auch der Durchmesser dieser Kugel (No. 35). Deswegen können wir sprechen: Dieß (ein Stück von No. 10. ergreifend) ist der Würfel des Durchmessers dieser Kugel (No. 35). Könnt ihr mir wohl jetzt sagen, wie groß die Seite des Würfels dieser Kugel (No. 33. ergreifend) seyn muß? K. Zwey Zoll. (So groß als ihr Durchmesser.)

L. Richtig! Hier (No. 8. B^3 vorlegend) ist der Würfel des Durchmessers dieser Kugel (No. 33). — Wie viel Scrupel hat denn ein Zoll? K. Hundert.

L. Nun rechnet einmal aus, wie viel Kubikscrupel diese Kugel (No. 35) enthalten muß. K. (finden die Zahl $523333\frac{1}{3}$ c'''').

L. Jetzt

L. Jetzt rechnet auch aus, wie viel Kubikscrupel dieser Würfel (No. 10) enthält. K. (finden die Zahl 1000,000).

L. Damit wir diese Zahl mit der vorhin gefundenen bey der ein Bruch ist, desto bequemer vergleichen können, so wollen wir in beyden Fällen die ganzen Scrupel zu Dritteln machen. Thut dieß. K. rechnen:

$$\begin{array}{r|r} 523333\frac{1}{3} & 1000000 \\ \hline 1570000 & 3 \\ \cline{2-2} & 3000000 \end{array}$$

L. Ihr wißt schon, daß das Verhältniß zweyer Zahlen nicht geändert wird, wenn man sie beyde mit einerley Divisor dividirt. Daher wollen wir jetzt diese zwei Zahlen, welche lauter Drittel von Cubikscrupeln anzeigen, mit 10000 dividiren, um sie kleiner und ihr Verhältniß desto leichter in die Augen fallend zu machen. Diese Division geschieht aber, wenn wir auf beiden Seiten 4 Nullen wegstreichen, wodurch wir folgende Zahlen 157 und 300 bekommen, welche das Verhältniß ausdrücken, in welchem diese Kugel (No. 35) zu dem Würfel ihres Diameters steht. Da man aber diese Zahlen immer findet, wenn man dem Diameter einer Kugel 100 Theile giebt, es mögen diese nun ganze oder halbe oder DrittelsSchuhe, Zolle oder Linien seyn; so kann man überhaupt sagen: *die Kugel verhält sich zu dem Würfel ihres Diameters*, wie 157 : 300. Da nun 157 etwas mehr als die Hälfte von 300 ist, so werdet ihr leicht einsehen, daß diese Kugel (No. 35) etwas mehr als

die

die Hälfte von diesem Würfel (No. 10) ausmachen müsse. Auch bestätigt dieß die Erfahrung. Denn wenn ich diese Kugel (No. 35) in diesen hohlen Würfel (No. 12) lege, den übrigen Raum mit Sand ausfülle und dann die Kugel wieder heraus nähme, so bleibt dann ohngefähr der halbe Würfel mit Sand angefüllt. — Gesetzt nun, ich hätte eine Kugel, die gerade 157 Cubikschuh enthielte, wie viel solcher Schuhe müßte dann der Würfel ihres Durchmessers enthalten? K. Gerade 300. Wie aber, wenn ich wüßte, daß ein gewisser Würfel gerade 300 Cubikschuh ausmachte, was könnte ich dann von einer Kugel, deren Durchmesser der Seite dieses Würfels gleich wäre, in Ansehung ihres körperlichen Inhalts behaupten? K. Daß dieser 157 Kubikschuhe betragen müßte.

L. Auf diese Art hätten wir noch ein Mittel, den körperlichen Inhalt einer Kugel zu erforschen, indem wir nur allemal bey uns denken dürfen: Wie sich verhält 300 zu 157, so muß sich verhalten der Würfel oder, welches einerley ist, die Cubikzahl des Diameters einer gegebenen Kugel zu ihrem körperlichen Inhalt. Folglich dürfen wir nur ein Regeldetri-Exempel ansetzen, das allemal im ersten Gliede die Zahl 300 im zweyten 157, und im dritten die Cubikzahl des Diameters der auszurechnenden Kugel hat. Ich will sehen, ob ihr ein solches Exempel ansetzen und auf diese Art den körperlichen Inhalt einer Kugel, deren Durchmesser 4 Schuh ist, finden könnt. K. (setzen an und rechnen:

300 : 157 = 64*) Inhalt der Kugel.

64

628

942

300 | 10048 | $33\frac{148}{300} = 33\frac{27}{75}$ c'

900

1048

900

148

Dergleichen Exempel werden mehrere gerechnet, und hat man Schüler, die die Cubikwurzel ausziehen können, so kann man ihnen hier auch noch folgenden Satz beybringen. Aus dem gegebenen Inhalte einer Kugel kann man durch Hülfe des Verhältnißes 157 = 300 ihren Diameter finden, wenn man zu 157, 300 und dem Inhalte der Kugel durch Hülfe der Regeldetri die 4te Proportionalzahl sucht und aus dieser die Cubikwurzel zieht, oder: wenn man den gegebenen Inhalt einer Kugel mit 300 multiplicirt, das Produkt mit 157 dividirt und aus dem Quotienten die Cubikwurzel zieht. Denn wie sich 157 verhält zu 300, so muß sich ja der Inhalt einer jeden Kugel zu dem Würfel oder der Cubikzahl ihres Durchmessers verhalten. Und ist diese Zahl durch Hülfe der Regeldetrie gefunden, so erhalte ich ja offenbar den Durchmesser selbst, wenn ich aus ihr die Cubikwurzel ziehe. Auf diese Art kann man jeden Körper, dessen Inhalt gefunden werden kann, gleichsam in eine Kugel verwandeln, d. h. man kann den Diameter einer Kugel finden, die dem vorgegebenen Körper gleich ist.

Beyspiel.

Wie groß müßte der Durchmesser einer Kugel seyn, welche den Raum eines 9 Fuß hohen, 15 Fuß breiten, und 18 Fuß langen Zimmers einnehmen sollte?

Hier wird erstlich der cubische Inhalt des Zimmers gesucht.

*) 64 ist die Cubikzahl von 4, dem Durchmesser der gegebenen Kugel.

18' Länge

```
  18′ Länge
  15′ Breite
  ----------
  90
 18
  ----------
 270
   9′ Höhe
  ----------
 2430 c′ Inhalt des Zimmers.
```

Nun wird zu 157, 300 und 2430 die 4te Proportionalzahl gesucht.

```
157 : 300 = 2430
              300
       ----------------
   157|729000|4643,3121
      |628   |
       --------
       1.0.1.0
        942
        -------
         680
         628
         -------
         .5.2.0
          471
          -------
          .49.0*)
           471
           -------
            19.0
            157
            -------
             33.0
             314
             -------
             .16.0
              157
              -------
               ..3
```

*) Von hier an wird zu jedem Reste eine Null gesetzt, um einen Decimal-Bruch (der hier nur bis auf 4 Stellen gesucht wird) zu erhalten.

Aus dem gefundenen Quotienten (der 4ten Proportionalzahl) wird nun die Cubikwurzel durch Näherung gezogen.

```
4|643,|312|100|16,683
1 |    |   |   |
-----------
3|6.4.3
  (3)
 18
 108
  216
-----------
3906
-------------
  5.4.7|3.1.2.
    (768)
  4608
    1728
      216
-----------------
  478296
-----------------
    69.0.16|1.0.0
    (82668)
   661344
      31872
          512
-------------------
  66453632
-------------------
      256.2468|0.0.0
      (8346672)
     25040016)
           45036
                27
---------------------
     25044451987
---------------------
        580160.13
```

Wenn

Wenn man mit 1000 Theilchen zufrieden ist, so muß der gesuchte Durchmesser halten

16′, 6″, 8‴, 2⁗. Sucht man den cubischen Inhalt einer Kugel von dem erst angegebenen Durchmesser, so wird man ihn finden = 2429c′, 970c″, 465c‴, 028 $\frac{16}{100}$ c⁗. Woraus erhellet, daß nur noch etwas mehr, als 29 c″ zu dem 2530 Kubikschuhen, dem Inhalte des gegebenen Zimmers, fehlen.

L. Ich will einmal der Kürze wegen diese Kugel (No. 35. vorzeigend) A, diese aber (No. 34) B, diesen Würfel da (ein Stück von (No. 10) C, und diesen da (No. 8 B³) D nennen. Nun sagt mir einmal, welches in Zahlen ausgedrückte Verhältniß gleich ist, dem Verhältniße A: C, oder: wie sich die Kugel A zu dem Würfel C (beyde Körper neben einander auf den Tisch legend) verhält. K. Wie 157 : 300.

L. Gut! Und wie verhält sich B zu D (beyde Körper auch hinlegend)? K. Auch wie 157 zu 300.

L. Da haben wir zwey Verhältniße die einem dritten gleich sind. Es ist nämlich 1) A : C = 157:300.
2) B : D = 157:300.
Was folgt nun hieraus? K. Daß die zwey Verhältniße A : C und B : D einander selbst gleich seyn müssen.

L. Also sind diese 4 Körper proportionirt, und es muß sich verhalten A : C = B : D (die 4 Körper in der Ordnung, wie sie hier genannt sind, in eine Reihe legend). Aus jeder Proportion können

wir,

wir, wie ihr wißt durch Verwechslung eine neue machen. Diese Verwechslung nehmt hier vor und sagt mir dann, wie die Proportion lautet. K. (machen das 3te Glied zum 2ten, und das 2te zum 3ten und sprechen: die Kugel A verhält sich zur Kugel B, wie der Würfel C zum Würfel D.

L. Da C der Würfel des Diameters von A, und D der Würfel des Diameters von B ist; so können wir hier sagen: Diese zwei Kugeln (A u. B) verhalten sich zu einander, wie die Würfel oder Cubikzahlen ihrer Durchmesser. Dieß ist aber nicht bloß bey diesen beyden, sondern bei allen Kugeln der Fall. Wie werdet ihr daher sprechen, wann ihr sagen sollt, wie sich irgend zwey Kugeln zu einander verhalten? K. Wie die Würfel (Cubikzahlen) ihrer Durchmesser.

L. Wie oft ist denn dieser kleine Würfel C in D enthalten? K. Acht Mahl.

L. Wie oft muß demnach auch die Kugel A in B enthalten seyn? K. Auch acht Mahl.

L. Ihr seht nun ein, daß ihr euch hüten müßt, zu glauben, als sey eine Kugel, deren Durchmesser noch zwey, drei ꝛc. Mahl so groß ist, als der Durchmesser einer andern, auch zwey, drey ꝛc. Mahl größer als diese andere. Denn nicht wie ihre Durchmesser verhalten sich zwey Kugeln, sondern —? K. Wie die Cubikzahlen ihrer Durchmesser.

L. Was für Zahlen müßt ihr also alle Mahl suchen, wenn ihr erfahren wollt, wie sich zwei

Kugeln

Kugeln zu einander verhalten? K. Die Kubikzahlen ihrer Durchmesser.

L. Da ihr dieses wißt, so werdet ihr mir gleich sagen können, wie viel solche Kugeln (No. 35) in einer andern, die 3 Zoll im Durchmesser hat, enthalten seyn müssen. K. Sieben und zwanzig.

L. Wie viel Mahl muß aber eine Kugel L größer als eine Kugel N seyn, wenn der Durchmesser von L vier Mahl so groß als der Durchmesser von N ist? K. Dann muß L 64 Mahl größer seyn.

L. Nun erforscht, wie viel Mahl die Sonne größer als unsere Erde seyn muß, da ihr (der Sonne) Durchmesser 112 Mahl größer als der Durchmesser der Erde ist. K. (suchen die Cubikzahl von 112 und sagen) die Sonne ist 1,405,928 Mahl größer als die Erde.

L. Wißt ihr noch wie sich die Peripherie zweyer Kreise zu einander verhalten? K. Wie ihre Durchmesser.

L. Wie werden sich also wohl die Peripherien zweyer Kugeln zu einander verhalten? K. Wie ihre Durchmesser.

L. Wenn also der Durchmesser einer Kugel K zwey Mahl größer als der Durchmesser einer Kugel k ist, wie viel Mahl wird der Umfang von K größer als der Umfang von k seyn? K. Auch zwey Mahl.

L. Aber beträgt deßwegen der körperliche Inhalt von K auch nur zwey Mahl so viel als von k? K. Nein.

L. Wie

L. Wie viel Mahl ist denn K größer als k? K. Acht Mahl.

L. Hieraus seht ihr, daß man das Verhältniß zweyer Kugeln auch nicht, wie viele Ununterrichtete thun, nach ihren Umfangslinien bestimmen und glauben dürfe, daß eine Kugel, deren Umfang zwey, drey rc. Mahl mehr beträgt, als der Umfang einer andern, auch zwey, drey rc. Mahl größer seyn müsse, als diese andern.

Anhang.

§. 1. Aufgabe. Ein Octaëdrum, Dodekaëdrum und Ikosaëdrum auszurechnen.

Aufl. 1.) Das Oktaëdrum besteht aus zwey gleichen Pyramiden, die mit ihren Grundflächen, welche Quadrate sind, auf einander stehen. Wenn man daher eine dieser Pyramiden ausrechnet und die gefundene Zahl verdoppelt, so hat man den Inhalt des Octaëdrums.

2.) Das Dodekaëdrum besteht aus 12, in seinem Mittelpunkte zusammen stoßenden, fünfseitigen Pyramiden von gleichen Höhen und Grundflächen. Daher muß der Inhalt einer solchen Pyramide, 12 Mahl genommen, den Inhalt des ganzen Körpers geben. Daß die halbe Höhe des Dodekaëdrums die Höhe einer der erwähnten Pyramiden anzeigen müsse, fällt von selbst in die Augen.

3.) Eben so wird das Ikosaëdrum als aus 20, mit ihren Spitzen in seinem Mittelpunkte zusammenstoßenden dreyseitigen, Pyramiden von gleichen Höhen und Grundflächen zusammen gesetzt gedacht. Daher wird der Inhalt dieses Körpers gefunden, wenn man eine der Pyramiden, woraus er besteht, und deren Höhe ebenfalls die halbe Höhe des ganzen Körpers ist, ausrechnet und ihren Inhalt mit 20 multiplicirt.

§. 2. Aufgabe. Die Höhe des ganzen senkrechten Kegels zu finden, wovon ein gegebener abgekürzter ein Theil ist.

Aufl. Es sey e f c b (Fig. 9. T. I.) der gegebene abgekürzte Kegel. Man trage g e, den Halbmesser der kleinern Grundfläche, auf d b, den Halbmesser der größern Grundfläche, und zwar von d nach h, um in dem Stücke h b die Differenz zwischen den beyden Radien zu erhalten. Hierauf messe man die Höhe des abgekürzten Kegels und suche zur Differenz b h, zur Höhe e h = g d und zum Halbmesser b d die vierte Proportionallinie, oder wenn diese Linien in Zahlen ausgedrückt sind, die vierte Proportionalzahl. Diese gefundene Linie oder Zahl zeigt dann die gesuchte Höhe des ganzen Kegels an.

Beweis. Wenn man e h (Fig. 9.) von dem Punkte e bis auf die Grundfläche parallel mit der Axe des ergänzten Kegels zieht; so entsteht ein Dreyekk a d b in welchem eine Linie h e parallel mit einer Seite d a gezogen ist. Und in diesem Falle ist nach dem 72sten Satze des 3. Bdch. das kleinere Dreyekk h e b ähnlich dem ganzen Triangel d a b, woraus sich unter andern folgende Proportion ergiebt: b h : h e = h d : d a (Satz 73 des 3. Bdch.). Dieses mit Worten allgemein ausgedrückt heißt: Die Differenz der beyden Radien des abgekürzten Kegels verhält sich zur Höhe desselben, wie der Radius der größern Grundfläche zur Höhe des ganzen Kegels. Da man nun an jedem gegebenen abgekürzten Kegel

gel die beyden Radien, ihre Differenz und seine Höhe messen kann; so läßt sich auch allemal auf die angegebene Art die Höhe des ganzen Kegels finden.

§. 3. Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines abgekürzten geraden Kegels e f c b (Fig. 9.) zu finden.

Aufl. Man suche 1) auf die im vorhergehenden § gezeigte Art die Höhe des ganzen Kegels und berechne dann seinen Inhalt. 2) Berechne man den Inhalt des fehlenden Stückes (des fehlenden kleinern Kegels) a f e, dessen Grundfläche gleich ist der kleinern Grundfläche des gegebenen abgekürzten, und dessen Höhe man erhält, wenn man von der gefundenen Höhe des ganzen Kegels die Höhe des abgekürzten abzieht. 3) Ziehe man den Inhalt des kleinern Kegels a f e von dem Inhalte a c b ab, wo dann der Rest den Inhalt des abgekürzten Kegels angiebt.

Da man eine abgekürzte Pyramide als einen abgekürzten Kegel, der mit ihr gleiche Höhe und Grundfläche hat, betrachten kann: so läßt sich der Inhalt eines solchen Körpers auf die im vorigen § angegebene Art finden. Nur muß man erst den Quadrat-Inhalt ihrer Grundflächen, und dann nach §. 13. die Halbmesser der Kreise suchen, die diesen Grundflächen gleich sind.

Da ganze Baumstämme als ganze und sogenannte Sägeblöcke, (woraus die Bretter geschnitten werden) als abgekürzte Kegel zu betrachten sind; so wird der, welcher den Inhalt eines ganzen und abgekürzten Kegels finden kann,

auch im Stande seyn, den körperlichen Inhalt eines Baumstammes, er sey nun ganz, oder abgekürzt, zu berechnen.

Ein Exempel dieser Art stehe zur Erläuterung hier:

Ein abgekürzter Baumstamm A, wovon der obere Theil fehlt, sey 36 Fuß lang, der Halbmesser der größern Grundfläche halte 10 und der der kleinern 8 Zoll. Wie viel beträgt nun der Cubikinhalt dieses Körpers?

Da die Differenz der Halbmesser der größern und kleinern Grundfläche = 2 ist, und die Höhe zugleich in Zollen ausgedrückt werden muß: so muß zu den Zahlen

2″ Differenz
360″ Höhe
10″ Halbmesser der größern Grundfläche

die vierte Proportionalzahl gesucht werden:

2″ : 360″ = 10″
10
2|3600| 1800″ = 180′ Höhe des ganzen Baumstammes, wovon A ein Theil ist.

Nun wird die Peripherie der Grundfläche dieses ganzen Baumstammes aus ihrem Durchmesser = 20″ und dann ihr ihr Quadratinhalt gesucht.

100″ : 314″ = 20″
20
100|6280|62 80/100 = 62″ 8‴ Peripherie
628″ Peripherie
50″ 1/4 des Durchm.
31400 □″ = 3 □′, 14 □″ Inhalt der Grundfläche.

Aus dieser Grundfläche und dem dritten Theile der Höhe des ganzen Baumes wird jetzt sein cubischer Inhalt berechnet.

314 □″ Grundfläche.
600″ 1/3 der Höhe.
188400 c″ = 118 c′ 400 c″ Inhalt des ganzen Baumstammes, wovon A ein Theil ist.

Jetzt

Jetzt wird der Inhalt des fehlenden Stückes — es soll B heissen — gesucht, damit man es vom Ganzen abziehen kann.

Da die Höhe des ganzen Baumes 180′, die des Stückes A aber 36′ beträgt; so ist das folgende Stück B 180′ — 36′ = 144′ lang. Da der Durchmesser der Grundfläche von B = 16″ ist, so ist ihre Peripherie $= \frac{314.16}{100} = 5024''''$

= 50″, 2‴, 4⁗, folglich

5024⁗ Peripherie.
400⁗ 1/4 des Durchmessers.

2009600 □⁗ = 2□′, 96□⁗ Inhalt der Grundfläche von B.

20096 □‴ Grundfläche.
14400‴ Höhe des Stückes B.

8038400
80384
20096

3 | 289382400 | 96460800 c‴ Inhalt des Stückes B.
19
13
18
24

1.88.4.0.0.000 c‴ körperlicher Inhalt des ganzen Baustammes.
96 4 6 0 800 c‴ körperlicher Inhalt des Stückes B.

Rest 91 9 3 9 200 c‴ = 91 c′, 939 c″ 200 c‴ körperlicher Inhalt von A.

§. 4. Oft soll der cubische Inhalt eines Körpers, dessen Gestalt bloß von der Willkühr und dem

dem Eigensinne der Menschen abhängt und der in keine der in der Geometrie vorkommenden Körperklassen gehört, gesucht werden. In diesem Falle muß man, da gedachte Wissenschaft keine Regeln dazu an die Hand geben kann, zu folgendem bekannten Hülfsmittel seine Zuflucht nehmen:

Man verschaffe sich ein parallelepipedisches Gefäß, lege den auszurechnenden Körper hinein und überschütte ihn, je nachdem es seine Beschaffenheit erlaubt, mit Wasser oder feinem Sande, der natürlich eine ganz horizontale Oberfläche erhalten muß. Nun merke man sich im Gefäße, wie hoch das eine oder das andere, Wasser oder Sand, steht, wenn es den Körper ganz bedeckt. Hierauf nehme man diesen heraus, ohne dabey etwas von der ihn bedeckenden Materie verlohren gehen zu lassen und sehe, wie hoch sie jetzt im Gefäße steht. Der Unterschied zwischen der erstern und letztern Höhe zeigt die Höhe eines Parallelepipedums an, dessen Grundfläche congruent mit der innern Fläche des Bodens des gebrauchten parallelepipedischen Gefäßes ist, und das gleichen Inhalt mit dem auszurechnenden Körper haben muß. Man findet daher dieses letztern Inhalt, wenn man das erstere ausrechnet.

Um auch dieses Verfahren Kindern durch Anschauung deutlich zu machen, so leite man sie an, den cubischen Inhalt einer kleinen hölzernen Puppe u. d. g. auf die angegebene Art zu suchen.

§. 5. Bekanntlich werden Flüßigkeiten in Fässern nicht mit dem Kubikmaße, sondern mit Kannen (Quartieren, Stübchen, Vierteln, Maßen ꝛc.) gemessen. Wenn daher die Frage aufgeworfen wird: wie viel hält dieses oder jenes Faß? so wird nicht geantwortet: so oder so viel Cubikschuhe ꝛc. sondern: so oder so viel Kannen ꝛc. Um nun zu erforschen, wie viel Kannen ꝛc. ein gegebenes Faß enthält d. h. mit einem Kunstausdrucke: um das Faß zu visiren, bedient man sich eines besondern Werkzeugs, Visirstab genannt. Wie ein solches Werkzeug verfertigt und gebraucht werde, lehrt folgende Aufgabe:

Einen Visirstab zu verfertigen und zu gebrauchen.

Aufl. Man lasse sich ein Gefäß, so vollkommen cylindrisch, als möglich, machen, welches gerade eine Kanne (Maß, Quartier ꝛc.) hält. A B C D (Fig. 10. T. I.) sey ein dergleichen Gefäß. Seinen mit aller Sorgfalt genommenen Durchmesser C D trage man auf die beyden Schenkel eines rechten Winkels a b c Fig. 4. so, daß b d = b h = C D werde. Nun ziehe man die Linie d h. Diese Linie ist die Seite eines Quadrates, welches doppelt so groß als dasjenige ist, welches b d = b h zur Seite hat. Jetzt trage man d h von b nach e, und ziehe die e h. Diese e h ist die Seite eines Quadrates, welches drey mal so groß als das Quadrat auf d b ist. Hierauf wird e h von b nach f getragen und die f h gezogen, wodurch man die

Seite

eines Quadrates erhält, welches vier Mahl so groß als das Quadrat auf b d ist. Man trage ferner f h von b nach g und ziehe g h, und fahre so lange mit dieser Operation fort, als man es zu dem vorgesetzten Zwecke für nöthig erachtet. Sind nun dergleichen Linien so viele, als man will, auf b a (Fig. 4.) gefunden, so trage man sie auf eine, unter Fig. 5. dargestellte, Seite eines parallelepipedischen Stabes und schreibe in der gehörigen Ordnung die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. dazu. Auf eine andere Seite des nämlichen Stabes trage man wie Fig. 6. zeigt, die Höhe C A des als Einheit angenommenen Cylinders Fig. 10. so oft, als es angeht, schreibe dazu ebenfalls die Ziffern 1, 2, 3 ꝛc. und der Maßstab ist fertig. Diejenige seiner Seiten, worauf die Linien b d, b e, b f ꝛc. von Fig. 4. abgetragen worden sind, heißt die Flächenseite, die andere aber, worauf C A von Fig. 10. mehrmals getragen worden, wird die Längenseite, das Ganze aber ein cylindrischer Visirstab genannt. Der Gebrauch dieses Werkzeugs wird sich am deutlichsten durch ein Beyspiel zeigen lassen. Das cylindrische Gefäß A B C D Fig. 8. soll visirt werden. Man sucht daher vor allem seinen Durchmesser C D, mißt ihn mit der Flächenseite des cylindrischen Visirstabes und findet ihn = der Länge A 4. (Fig 5.) Hierauf wird mit der Längenseite des Visirstabes auch die Höhe C A von F. 8 gemessen und diese = der Länge A 5 (F. 6) gefunden. Nun finden folgende Schlüße Statt: Da der Durchmesser C D (F. 8) der Länge A 4 (F. 5) also der Seite eines

nes Quadrates gleich ist, welches 4 Mal so groß als das Quadrat des Durchmessers CD (F. 10) ist: so ist auch, da sich Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser zu einander verhalten, die Grundfläche des Cylinders A B C D (F. 8.) 4 Mahl so groß, als die des Cylinders A B C D F. 10. Wäre nun der Cylinder A B C D (Fig. 8) nur so hoch als der Cylinder A B C D (Fig. 10); so würde er 4 Mahl so groß als dieser seyn, also 4 Kannen halten, weil Cylinder von gleichen Höhen sich wie ihre Grundflächen zu einander verhalten. Allein der Cylinder A B C D (Fig. 8) ist 5 Mahl so hoch als der Cylinder Fig. 10, es müssen also 5 Schichten von 4 Kannen, also 5 Mahl 4 Kannen in ihm Raum haben. Diese Betrachtung leitet dann auf die Regel: Wenn der Durchmesser und die Höhe eines zu visirenden cylindrischen Gefäßes und zwar jener mit der Flächenseite, dieser aber mit der Längenseite des Visirstabes gehörig gemessen sind; so werden die Zahlen, die auf diese Weise auf demselben gefunden worden, mit einander multiplicirt, wo dann das gefundene Produkt die Anzahl der im Cylinder enthaltenen Kannen &c. anzeigt. Im vorliegenden Falle würde der Cylinder A B C D (F. 8.) $5 \times 4 = 20$ Kannen enthalten. Da Fäßer eine so unregelmäßige Gestalt haben, und bald mehr, bald weniger von der Cylindergestalt abweichen; so können sie auch nie ganz genau visirt werden. Jedoch ist, wie wirkliche Versuche beweisen, der Unterschied zwischen dem wahren und durch Hülfe des cylindrischen Visirstabes gefundenen Maße nicht gar groß, wenn man

bey

bey ihrer Visirung folgendermassen zu Werke geht. Man mißt mit der Flächenseite erstlich den kleinern oder den Bodendurchmesser, sodann auch den größern (Durchmesser der Spundtiefe). Hierauf werden beyde addirt und die gefundene Summe wird zur Hälfte, d. h. zwischen beyden Durchmessern wird das arithmetische Mittel genommen. Nun erst wird die Länge (Höhe des ganzen Faßes) mit der Längenseite des Visirstabes gemessen und die hierdurch auf demselben gefundene Zahl mit der vorigen (der halben Summe der beyden Durchmesser) multiplicirt. Das hierdurch erhaltene Produkt zeigt an, wie viel Kannen das Faß hält. Man sieht leicht ein, daß in diesem Falle das Faß als ein Cylinder behandelt wird, dessen Durchmesser das arithmetische Mittel zwischen seinen (des Faßes) beyden Durchmessern ist.

Ein ausführlicher Unterricht über die Visirkunst, wo auch Meldung des cubischen Visirstabes gethan wird, ist von dem Zwecke dieses Werkchens entfernt und muß in andern Schriften gesucht werden. Hier war es nur darum zu thun, einige vorläufige Kenntniße davon zu geben, und zu zeigen, was es mit dieser Kunst für eine Bewandtniß habe und welchen Nutzen man im bürgerlichen Leben von der Geschicklichkeit, den Cylinder zu berechnen, ziehen könne.

§. 6. Aufgabe. Die Seitenflächen eines Prisma auszurechnen.

Aufl. a. Man rechne nach dem 58sten Satze des 3. Bdch. jedes der Parallelogramme, die die Seitenflächen eines Prisma ausmachen, sodann eine der beyden Grund-

Grundflächen aus, nehme letztere doppelt und addire dazu die Seitenflächen, so giebt die Summe die ganze Oberfläche des Körpers.

Aufl. b. Nimmt man bey No. 7. die Fläche a. zur Grundfläche an und zieht die geraden Linien gh, ik, lm, mn, die die Seitenlinien unter rechten Winkeln schneiden*); so erhält man den Inhalt aller Seitenflächen, wenn man die Summe von gh, ik, lm, mn, mit einer der Seitenlinien, z. B. mit o p multiplicirt, denn in diesem Falle zeigen die Linien gh, ik, lm, mn die Höhen von Parallelogrammen an, die alle gleiche Seitenflächen von No. 7. sind. Oder: die Seitenflächen von No. 7. sind gleich einem Parallelogramme, dessen Grundlinie = o p, und dessen Höhe der Summe der Linien gh, ik, lm, mn gleich kommt. Wie hiervon die Anwendung auf jedes Prisma zu machen sey, fällt von selbst in die Augen.

Zus. Wäre das Prisma No. 7. ein gerades, wie No. 6. so wären die Linien gh, ik, lm, mn, einerley mit den Umfangslinien der Grundfläche und in diesem Falle wäre die Regel: multiplicire den Umfang der Grundfläche mit der Höhe des Körpers d. i. mit einer seiner Seitenlinien,

*) Um allgemein zu sprechen, müßte es heißen: macht man (No. 7.) einen Schnit gh ik lm mn senkrecht auf eine der gleichen und parallelen Seitenlinien op, der folglich auch auf allen übrigen Seitenlinien perpendicular ist; so ꝛc.

linien, weil man sich alsdann alle Seitenflächen zusammengenommen als ein Rechtekk vostellen kann, das zur Grundlinie den Umfang der Grundfläche und zur Höhe die Seitenlinie (Höhe) des Prisma hat.

Um dieses, wenn es nöthig seyn sollte, Kindern zu versinnlichen, lege man No. 46. um No. 6. herum und spreche etwa: wenn ich von diesem Prisma die Seitenflächen so herabnehmen und vor euch ausbreiten könnte, wie ich es jezt mit diesem Pappdekkel mache, so würden wir ein Rechtekk erhalten, dessen Höhe gleich wäre, der Höhe dieses Prisma, und dessen Grundlinie gerade so viel betragen müßte, als der ganze Umfang der Grundfläche des vorliegenden Körpers. Deßhalb können wir uns die Seitenflächen eines geraden Prisma zusammengenommen allemal vorstellen, als ein Rechtekk, welches etc. Und dieses Rechtekk vereinigt mit beyden Grundflächen macht immer die Oberfläche des ganzen Körpers aus.

§. 7. Aufgabe. Die Oberfläche eines geraden Cylinders zu finden.

Aufl. Da die Seitenfläche eines solchen Cylinders als aus lauter Rechtekken bestehend gedacht werden kann, deren Grundlinien zusammen genommen gleich seyn müssen der Peripherie der Grundfläche und deren Höhe einerley mit der Seite des Cylinders ist: so erhellet hieraus, daß die Seitenfläche gefunden wird, wenn man die Höhe und Peripherie der Grundfläche mit einander multiplicirt. Wird nun zu dem hierdurch gefundenen Produkte die nach dem 68sten Satze des 3. Bdch. zu findende

dende Grundfläche, zwey Mahl genommen, addirt; so giebt die Summe die ganze Oberfläche des geraden Cylinders.

Auch hier läßt sich durch Versinnlichung den Kindern zeigen, daß man sich die Seitenfläche des geraden Cylinders als ein Rechtekk vorstellen könne, dessen Höhe die Höhe des Cylinders und dessen Grundlinie der Umring der Grundfläche ist. Man darf zu diesem Behufe nur No. 47. und No. 15. legen, dann wieder wegnehmen, vor den Augen der Kinder ausbreiten und sprechen: wenn die Seitenfläche dieses Cylinders so davon abgesondert und ausgebreitet werden könnte, wie dieses Stückchen Pappe; so würde sie gerade ein solches Rechtekk bilden, dessen Höhe ꝛc.

§. 8. Aufgabe. Die Oberfläche einer Pyramide zu finden.

Aufl. Da die Seitenflächen einer Pyramide Triangel sind, so werden erstlich diese auf die bekannte Art ausgerechnet und dann alle mit der Grundfläche in eine Summe gebracht.

Zusatz. Ist die Grundfläche eine reguläre Figur im Kreise, die Pyramide gerade, so daß also ihre Seitenflächen lauter congruente Dreyecke von gleicher Höhe sind, wie bey No. 23. und 24; so werden diese (die Seitenflächen) alle auf einmal gefunden, wenn man mit der halben Höhe von einer derselben, d. h. mit dem halben Perpendikel (o p No. 24.) der von der Spitze der Pyramide

auf

auf eine Seite ihrer Grundfläche gezogen werden kann, den Umring der Grundfläche multiplicirt. Denn: indem man dieses thut, ist es eben so viel, als wenn man die Grundlinie einer jeden Seitenfläche mit ihrer halben Höhe multiplicirte, die Triangel also einzeln ausrechnete und die Produkte am Ende addirte. Auch kann man sich die Sache so vorstellen: Die Seiten-Triangel an einer der erwähnten Pyramiden zusammen genommen sind so groß, als ein Dreyekk, dessen Grundlinie gleich ist dem Umfange der Grundfläche der Pyramide, und dessen Höhe übereinkommt mit der Höhe eines solchen Seiten-Triangels. Um nun dieses Dreyecks Größe zu finden, muß nothwendig die Peripherie der Grundfläche der Pyramide mit der halben Höhe einer ihrer Seitenflächen multiplicirt werden.

§. 9. Aufgabe. Die Oberfläche eines geraden Kegels auszurechnen.

Aufl. Ein gerader Kegel ist im Grunde nichts anders als eine Pyramide, deren Grundfläche ein reguläres Polygon von unendlich viel Seiten ist, deren Seitenfläche also als aus lauter gleichschenklichen congruenten Dreyecken bestehend gedacht werden kann. Die Höhe dieser Dreyecke ist die Seite des Kegels und ihre Grundlinien zusammen genommen müssen gleich seyn der Peripherie der Grundfläche. Oder auch: die Seitenfläche eines geraden Kegels ist gleich einem Dreyecke, welches zur Höhe die Seite des Kegels und zur Grundlinie die Peripherie seiner Grundfläche hat. Hieraus folgt, daß

die

die Seitenfläche des geraden Kegels gefunden werde, wenn man die Peripherie der Grundfläche mit der halben Seite des Kegels multiplicirt. Zu dem dadurch gefundenen Produkte die Grundfläche addirt giebt die ganze Oberfläche des geraden Kegels.

§. 10. Erkl. Einen geometrischen Körper kubiren heißt: einen Würfel oder die Seite eines Würfels finden, dessen Inhalt dem Inhalte eines gegebenen Körpers gleich ist. Die Kubatur heißt geometrisch, wenn man diese Seite vermittelst einer geometrischen Verzeichnung (Konstruktion), arithmetisch, wenn man sie durch Rechnung findet.

Die erstere Art der Kubatur kann nur in der höhern Geometrie gelehrt werden; hier ist von der letztern die Rede.

§. 11. Aufgabe. Die Seite eines Würfels zu finden, der doppelt so groß als ein gegebener seyn soll.

Aufl. Man suche den Inhalt des gegebenen Würfels, verdoppele diesen und ziehe aus dieser Summe die Kubikwurzel, so giebt diese die Länge der Seite des gesuchten Würfels an. Die Einheiten der gefundenen Zahl (Kubikwurzel) führen den Namen Linien, Zolle, Schuhe ꝛc. je nachdem der körperliche

In-

Inhalt des gegebenen Würfels in Kubiklinien, Kubikzollen, Kubikschuhen ꝛc. ausgedrückt war.

Beyspiel. Es soll die Seite eines Würfels gefunden werden, der zwey Mahl so groß als No. 8 B^3 ist.

$8^{c''}$ Inhalt des gegebenen Würfels No. 8 B^3.
$8^{c''}$

$16^{c''}$ der verdoppelte Inhalt von No. 8.

Aus 16 wird jetzt die Cubikwurzel gezogen. Diese ist aber irrational und man kann sie nur durch Näherung finden. $2{,}519 = 2\frac{519}{1000}$ kommt ihr schon ziemlich nahe. Wenn man daher einen Würfel verfertigte, dessen Seite $2\frac{519}{1000}$ Zoll hielte, so würde sein Inhalt beynahe zwey Mahl so viel als No. 8 B^3 betragen.

Wie man die Seite eines Würfels der drey, vier ꝛc. Mahl so groß als ein gegebener ist, finden könne, erhellet aus dem Vorhergehenden. Man nimmt nämlich den Inhalt des gegebenen, 3, 4 ꝛc. Mahl und zieht aus diesem vervielfachten Inhalte die Cubikwurzel.

§. 12. Aufgabe. Jeden Körper, dessen Inhalt man finden kann, in einen Würfel zu verwandeln. Oder: Die Seite eines Würfels zu finden, dessen Inhalt so viel beträgt als ein gegebener Körper, dessen Inhalt gefunden werden kann.

Aufl.

Aufl. Man suche den kubischen Inhalt des gegebenen Körpers und ziehe daraus die Kubikwurzel, so hat man in ihr die in Zahlen ausgedrückte Länge der Seiten des gesuchten Würfels.

Beyspiele. 1) Ein auf ABC (Fig. 21.) errichtetes 3 Zoll hohes Prisma soll in einen Würfel verwandelt werden. Man sucht seinen körperlichen Inhalt, welcher 27 Cubikzoll beträgt und zieht aus dieser Zahl die Cubikwurzel. Da diese nun die Zahl 3 ist; so muß die Seite des Würfels, welcher so groß als das angenommene (gegebene) Prisma seyn soll, 3 Zoll lang seyn. Der Würfel No. 8. ist demnach mit dem erwähnten Prisma von gleichem Inhalte. Will man diesen Fall versinnlichen, so errichte man mit Hülfe von No. 10, 11, 4 und 8 A^3 das erwähnte Prisma auf Fig. 21. und bilde nachher mit den genannten Nummern einen Würfel, dessen Seite 3 Zoll lang ist.

2) Eine Pyramide, deren Grundfläche 4□′ und deren Höhe 48′ beträgt, soll kubirt werden. Der Inhalt dieser Pyramide ist $= \frac{48}{3}.4 = 64^{c\prime}$ die Cubikwurzel aus 64 ist 4. Folglich ist ein Würfel, dessen Seite = 4 Schuh ist, dieser Pyramide gleich.

3) Eine Kugel, deren Durchmesser $2\frac{1}{2}$ Zoll oder 25 Linien beträgt, soll kubirt werden. Vor allem muß man den Inhalt dieser Kugel nach dem 32sten Satze suchen. Er beträgt $8^{c\prime\prime}$, $177^{c\prime\prime\prime}$, $083\frac{1}{3}^{c\prime\prime\prime\prime}$ oder, wenn man den unbedeutenden Bruch

($\frac{1}{3}$)

($\frac{1}{3}$) wegläßt, $8177083^{c''''}$. Aus dieser Zahl wird nun die Cubikwurzel gezogen, die aber, weil sie irrational ist, nur durch Näherung gefunden werden kann. Sie ist noch etwas größer als 201,4. Diese Einheiten führen den Namen Scrupel, weil der Inhalt der Kugel in Cubikscrupeln gegeben war. Die Seite des Würfels welcher der gegebenen Kugel (beynahe) gleich ist, muß also $201\frac{4}{10}$ Scrupel = $2'', 0'''$i$1\frac{4}{10}''''$ betragen. Der Würfel No. 8. ist also nur etwas kleiner, als eine Kugel, die $2\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser hält.

§. 13. Aufgabe. Eine Kugel, einen Cylinder (oder jedes andere Prisma), dessen Dimensionen bekannt sind, in einen gleich großen Kegel zu verwandeln.

Aufl. A.) Wenn die Höhe des zu suchenden Kegels vorgeschrieben ist:

Man suche den Inhalt des gegebenen Körpers und dividire ihn durch den dritten Theil der vorgeschriebenen Höhe, so zeigt der Quotient die Grundfläche im Quadratmaße an, und zwar führen die Einheiten des Quadratmaßes den nämlichen Namen, den die Einheiten des Kubikmaßes, in welchem der Inhalt des zu verwandelnden Körpers angegeben war, führten.

Beyspiel. Ein Cylinder, der 6 Fuß hoch ist und einen Schuh im Durchmesser hält, soll in einen 9 Schuh hohen Kegel verwandelt werden.

Zu

Zu Folge der vorhergehenden Auflösung, wird also erstlich der Inhalt des gegebenen Cylinders gesucht. Er beträgt 4c', 710c'' = 4710c''. Diese Zahl (4710) mit dem dritten Theile der Höhe des zu suchenden Kegels, also mit 30'' (= 3'), dividirt giebt zum Quotienten 157, welche Zahl die Menge der Quadratzolle, die die Grundfläche des zu suchenden Kegels haben muß, anzeigt. Da die Grundfläche des Kegels ein Kreis ist, so muß, wenn dieser Kreis beschrieben werden soll, sein Durchmesser gesucht werden. Er wird gefunden durch Hülfe des Verhältnißes 785 : 1000 (Satz 88 des 3. Bdch.), indem man schließt, wie sich 785 verhält zu 1000, so muß sich 157 zu dem Quadrate des gesuchten Durchmessers verhalten. Die Rechnung selbst ist folgende:

785 : 1000 = 157
1000

785 | 157000 | 200 Quadrat des Durchmessers eines Kreises, der 157□'' hält.
| 1570 |
....

Aus dieser Quadratzahl wird nun die Quadratwurzel gezogen, weil diese die Länge des Durchmessers angiebt. Da sie aber irrational ist, so kann sie nur durch Näherung gefunden werden, wie folgende Rechnung zeigt:

```
 2|00|14, 14
 1|  |
 ------
 1 00|
 (2)4
  96
 ----------
    ⸗4.0.0
   (2 8)1
    2 8 1
    ----------
    1 1 9.0.0
     (2 8 2)4
    1 1 2 9 6
    ----------
    ⸗ ⸗ 6 0 4
```

Wenn man hier stehen bleibt und nicht auch Tausendtheilchen suchen will, also dem Durchmesser $1'$, $4''$, $1'''$, $4''''$ giebt, so hält sein Kreis 156□″ 95□‴, $25\frac{85}{100}$□⁗, woraus erhellet, daß nur etwas mehr als 4□⁗ zu 157□″ fehlen. Demnach wird ein Kegel, dessen Grundfläche im Durchmesser $1414''''$ hält und der $9'$ hoch ist, beinahe so groß als ein Cylinder seyn, dessen Höhe 6, und dessen Durchmesser 1 Schuh mißt. Der Unterschied beträgt noch weniger, als einen halben Cubikzoll, nämlich $422^{c'''}$, $410^{c''''}$.

B) Wenn die Grundfläche des zu suchenden Kegels bestimmt ist.

Man suche den Inhalt des gegebenen Körpers und dividire ihn durch die Grundfläche, so zeigt der Quotient den dritten Theil der Höhe des zu suchenden Kegels an.

Bey.

Beyspiel. Der im vorhergehenden Exempel erwähnte Cylinder soll in einen Kegel verwandelt werden, dessen Grundfläche einen Durchmesser von 15 Zoll hat, also einen Flächenraum von $1\square'$, $76\square''$, $62\square'''$, $50\square''''$ in sich faßt.

Die hier anzustellende Rechnung ist folgende;

$4^{c'}, 710^{c''} = 4710000000^{c''''}$ Inhalt des gegebenen Cylinders.

$1\square', 76\square'', 62\square''', 50\square'''' = 1766250\square''''$ Grundfläche des zu suchenden Kegels.

```
1766250|47.1.0.00000|2666 117750/176625 = 2', 6'',
        |35 3 2 50   |               6''' 6 942/1413 ''''
        ------------
         11 7.7.5.00
         10 5 9 7 50
        ------------
          0 1 7 7.5.00
          1 0 5 9 7 50
        ------------
           1 1 7.7.5.00
           1 0 5 9 7 50
        ------------
           1 1 7 7 50
```

Dieser gefundene Quotient zeigt das Drittel der Höhe des zu suchenden Kegels an, und muß um die ganze Höhe zu finden, mit 3 multiplicirt werden, wie folget:

$$
\begin{array}{l}
2666 \\
\underline{3} \\
7998 \\
\underline{2 \text{ Produkt aus } \tfrac{942}{1413} \times \tfrac{3}{1}} \\
8000'''' = 8'
\end{array}
$$

Der Kegel, worein der gegebene Cylinder verwandelt werden soll, muß also bey der gegebenen Grundfläche 8′ hoch werden.

Sucht man den cubischen Inhalt eines Kugels, der 8 Schuh hoch ist und dessen Grundfläche 15 Zoll im Durchmesser hält, so findet man ihn = 4c′, 710c″. Ein Beweis, daß die vorhergehende Rechnung richtig ist.

§. 14. Aufgabe. Irgend einen Körper, dessen Inhalt man finden kann, z. B. eine Kugel, einen Kegel oder jede andere Pyramide in einen gleich großen Cylinder zu verwandeln.

Auflösung.

A. Wenn die Höhe des Cylinders vorgeschrieben ist.

Man suche den Inhalt des zu verwandelnden Körpers und dividire ihn durch die Höhe, welche der Cylinder erhalten soll, so zeigt der Quotient die Grundfläche im Quadratmaaße an.

Bey-

Beyspiel. Ein Kegel der 8 Schuh hoch ist, dessen Grundfläche im Durchmesser 1 Schuh 5 Zoll hält, soll in einen Cylinder verwandelt werden, dessen Höhe 6' beträgt.

Rechnung um des Kegels Inhalt zu finden.

100 : 314 = 15'' : Peripherie.

```
        15
     ------
      1570
      314
     ------
100|47|10 = 4' 7'' 1''' Peripherie der Grund-
                         fläche des Kegels.

    471''' Peripherie.
     150''' Durchmesser.
   --------
    23550
    471
   --------
  4|70650|17662 2/4 □''' = 1□', 76□'', 62□''',
   |30''  |                          50□''''
   --------
    26
   ------
     25
    ------
      10
     ------
      2

   1766250□'''' Grundfläche des Kegels.
          8000'''' die in Scrupeln ausgedrückte
                    Höhe desselben.
  ---------------------------------
3|141300000000|4710000000c'''' = 4c' 710c''
 |12          |                 des Kegels Inhalt.
 ------
  21
 ------
   3
 ------
```

Rech-

Rechnung, um die Grundfläche des zu suchenden Cylinders zu finden, der $6' = 60''$ hoch seyn soll.

$60\!\!\!/ | 4710\!\!\!/ | 78\frac{3}{6} = 78\square'' \; 50\square'''$ Grundfläche des Cylinders, der dem gegebenen Kegel, bey der vorgeschriebenen Höhe, gleich seyn soll.

$$\begin{array}{l} |42\;\,| \\ \hline \cdot 51 \\ \;\;48 \\ \hline \cdot 3 \end{array}$$

Rechnung, um der erwähnten Grundfläche Durchmesser zu finden.

$$785 : 1000 = 7850$$
$$\begin{array}{r} 1000 \\ \hline 785 | 7850000 | 10000 \end{array}$$
Quadrat des gesuchten Durchm.

Die Quadratwurzel aus 10000 ist = 100. Also muß der Durchmesser eines Kreises, welcher 7850 Quadratlinien hält, gerade 100 Linien, oder einen Schuh lang seyn.

Demnach giebt der in dieser Aufgabe erwähnte Kegel einen Cylinder, der 6 Schuh hoch ist, und 1 Schuh im Durchmesser hält.

B) Wenn der Diameter oder die Grundfläche des Cylinders bestimmt ist.

Man dividire den Inhalt des zu verwandelnden Körpers durch die Grundfläche des zu suchenden Cylinders, so zeigt der Quotient die Höhe desselben an.

Beyspiel. Wie hoch müßte ein Cylinder seyn, der bey einem Durchmesser von 1720 Meilen so groß als die Erde seyn sollte?

Da der Inhalt der Erde 2662560000 Cubikmeilen, und der Inhalt der Grundfläche des verlangten Cylinders 2322344 Quadratmeilen beträgt, so ist die hier anzustellende fernere Rechnung folgende:

```
2322344|2662560000|1146 1153756/2322344  Meilen
       |2322344   |                      Höhe des
       ------------                      gesuchten
         34.0.2.16.0                     Cyl.
         2322344
         -----------
         1079.8.1.6.0
         9289376
         -----------
         15.0878.4.0
         13934064
         -----------
         .1153756
```

Die Richtigkeit der Auflösung der im 13ten und 14ten § enthaltenen Aufgaben erhellet aus folgenden Sätzen: 1) Der Inhalt eines Prisma wird angezeigt durch das Produkt aus seiner Grundfläche in seine Höhe. 2) Den Inhalt einer Pyramide giebt das Produkt aus seiner Grundfläche in das Drittel seiner Höhe. 3) Wenn das Produkt und der Faktor gegeben sind, und jenes durch diesen dividirt wird, so giebt der Quotient den andern Factor.

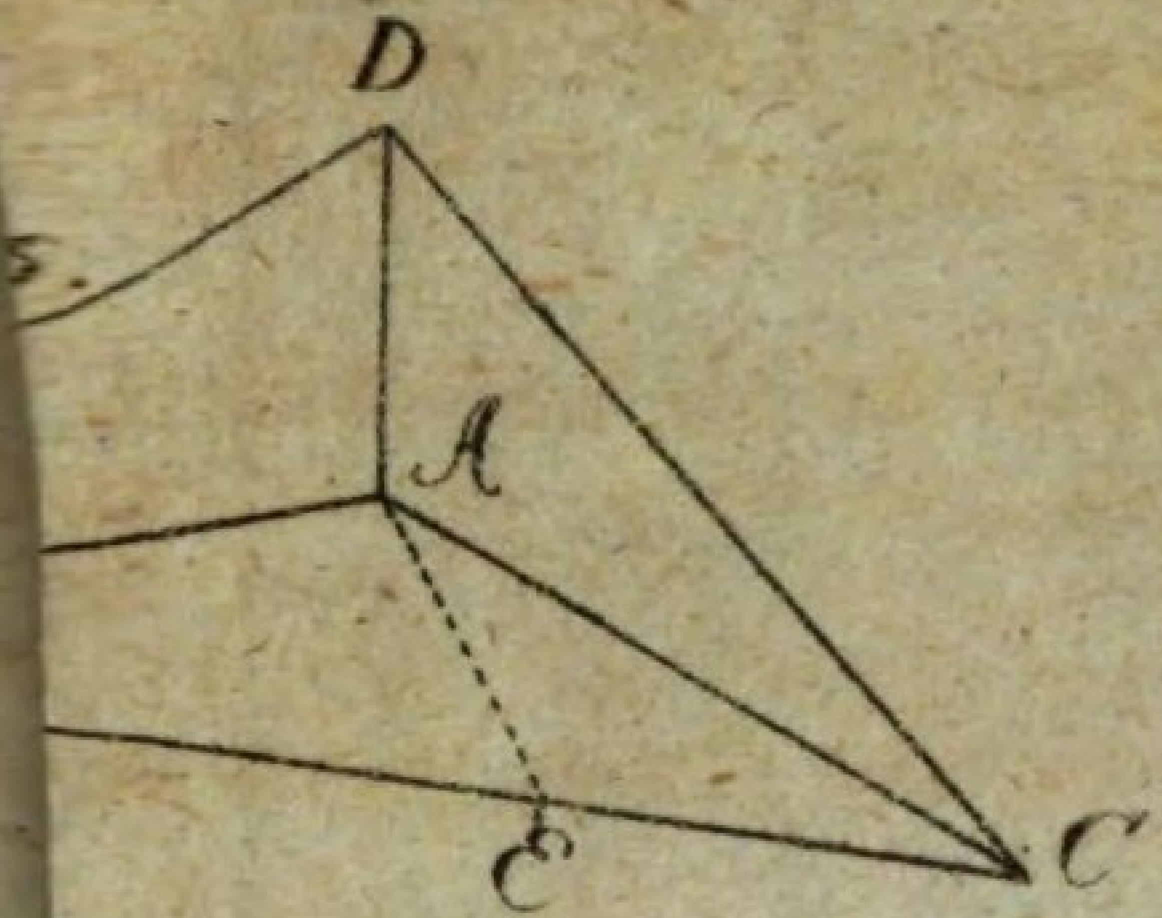
Ende des 3ten und letzten Bändchens.

Das Gemeinnützlichste aus der deutschen Sprachlehre, als Stoff zu Denk- und Sprechübungen benützt. Auch unter dem Titel: Praktische Anweisung für Schullehrer, welche ihren Zöglingen zu einer gründlichen Kenntniß ihrer Muttersprache verhelfen und zugleich deren Denkkräfte üben und bilden wollen. Von D. Joh. Paul. Pöhlmann. 8. Erlangen, 1813. bei Joh. Jak. Palm. 18 Ggr. oder 1 fl. 12 kr.

Dieses Werkchen darf die Verlagshandlung um so mehr empfehlen, da es die Leipziger Lit. Z. für ein sehr gründliches, ausführliches und nützliches Werk erklärt, und der Rezensent in der allgem. Lit. Zeit. (s. Nro. 194 u. 195. vom Jahr 1813.) dasselbe seinen Lesern mit folgenden Worten vorführt:

„Rez. hat das seltene Vergnügen, hier den Lehrern in den niedern Schulen ein recht gut gearbeitetes, nützliches Werkchen empfehlen zu können; das seinen bescheidenen Verf. selbst als einen denkenden und zum Lehren geschikkten Mann bezeichnet; dem es mit der großen, leider noch immer in den Schulen zu wenig beachteten, Angelegenheit der gründlichen Kenntniß der Muttersprache hoher Ernst ist. Kinder vom 7ten bis 10ten Jahre, nach dieser Anweisung unterrichtet, müssen nothwendig ihre Muttersprache in einem Grade in ihre Gewalt bekommen, den man wohl bei vielen, übrigens nicht ganz ungebildeten, aber nach dem gewohnten Schlendrian unterrichteten, Erwachsenen vergebens suchen dürfte. Zugleich werden sie aber auch im Denken, Bemerken und Unterscheiden, und in der mündlichen und selbst schriftlichen Darstellung ihrer Gedanken so geübt seyn, daß der eigentliche grammatische Unterricht weiter gar keine Schwierigkeiten antreffen kann. — Sehr zu beherzigen ist besonders auch die Stufenfolge, welche der Verf. bei seinen Uebungen beobachtet; so wie der Grundsatz in der Vorrede: daß man die Lehrlinge gewöhnen müsse, das, was sie jedesmal gethan haben oder zu thun beauftragt sind, richtig und bestimmt mit Worten auszudrükken, und einen vorgesagten Schatz, dessen Inhalt ihnen nicht unverständlich ist, vollständig und ohne Verwirrung nachzusprechen. — Auch darauf wird von gewöhnlichen Schullehrern viel zu wenig geachtet, sie sind zufrieden, wenn der Lehrling nur die einzelnen Wörter, auf welche es gerade ankommt, anzugeben weiß, ohne darauf zu sehen, daß er sie gehörig in den Satz einreihe, und dadurch um so fester in sein Gedächtniß und in seinen Verstand."

Tab: I



Tab: II

Fig:16.

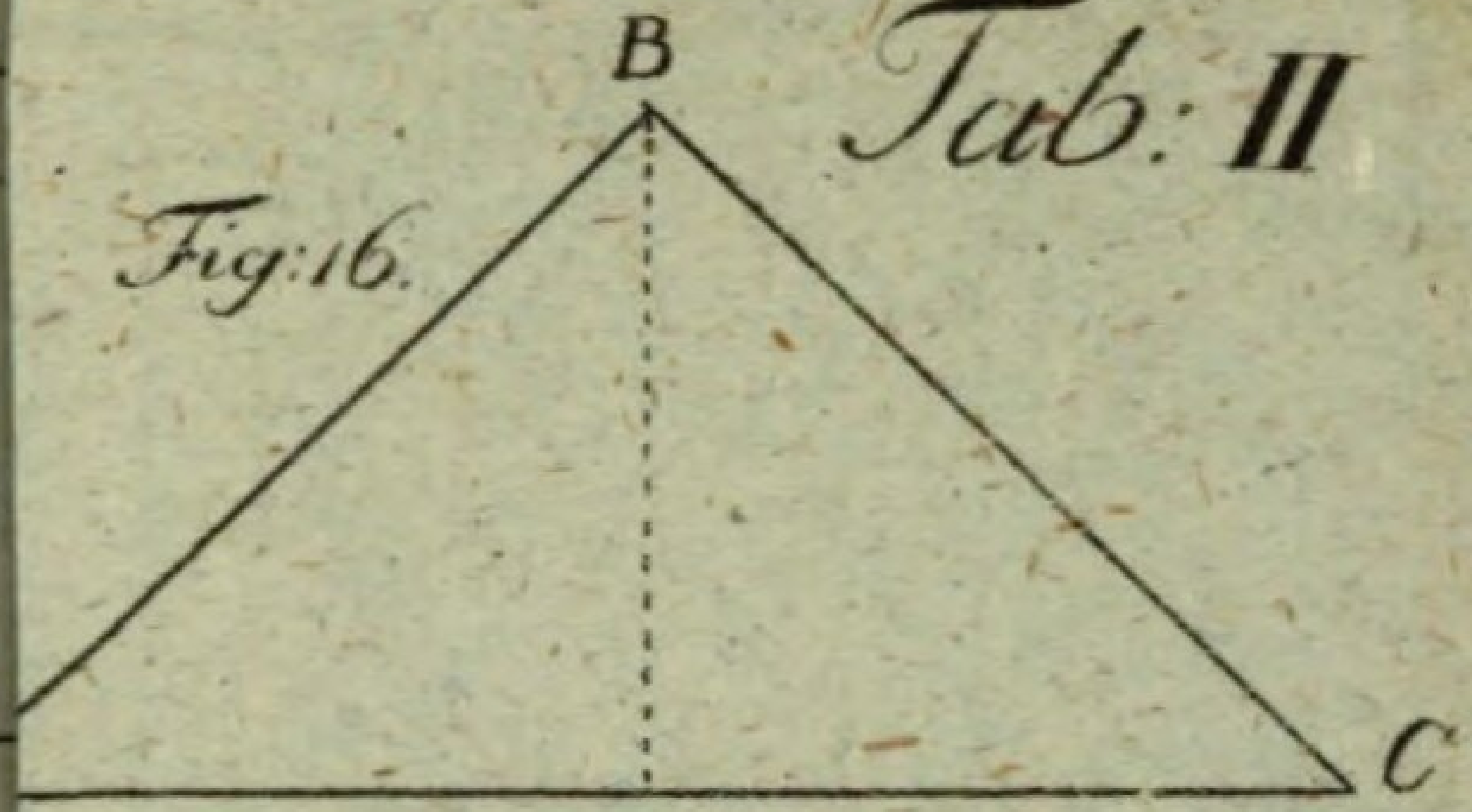
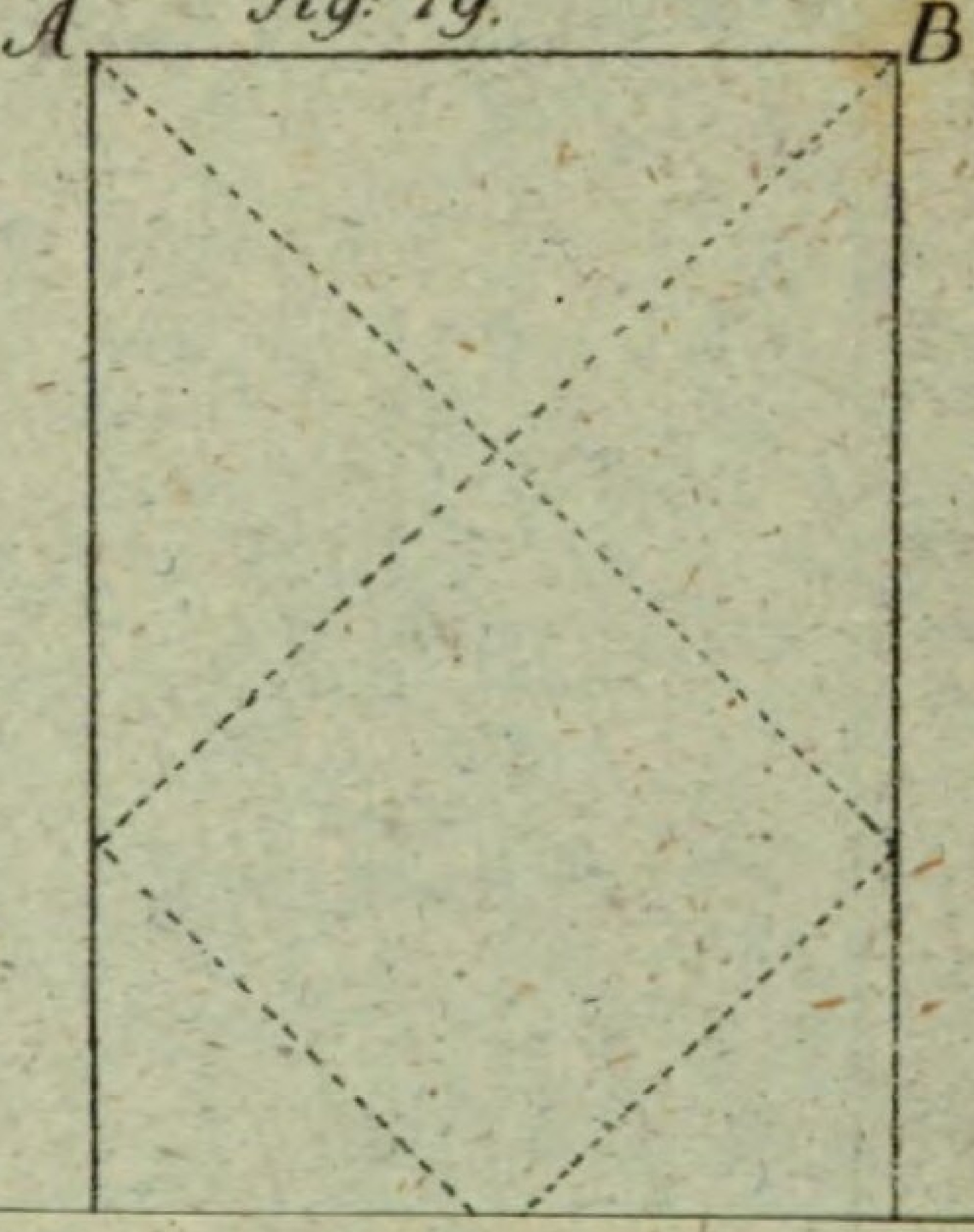
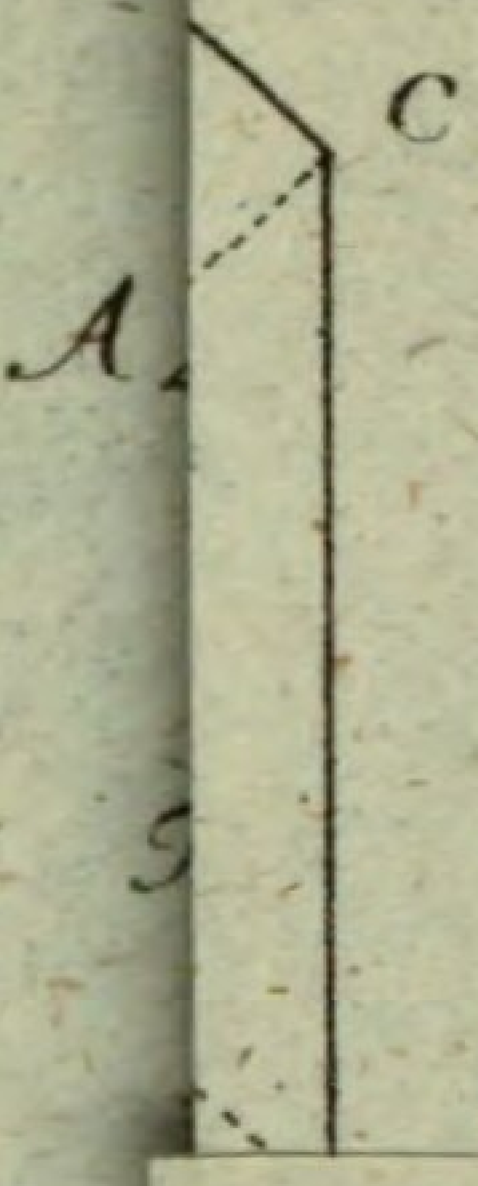
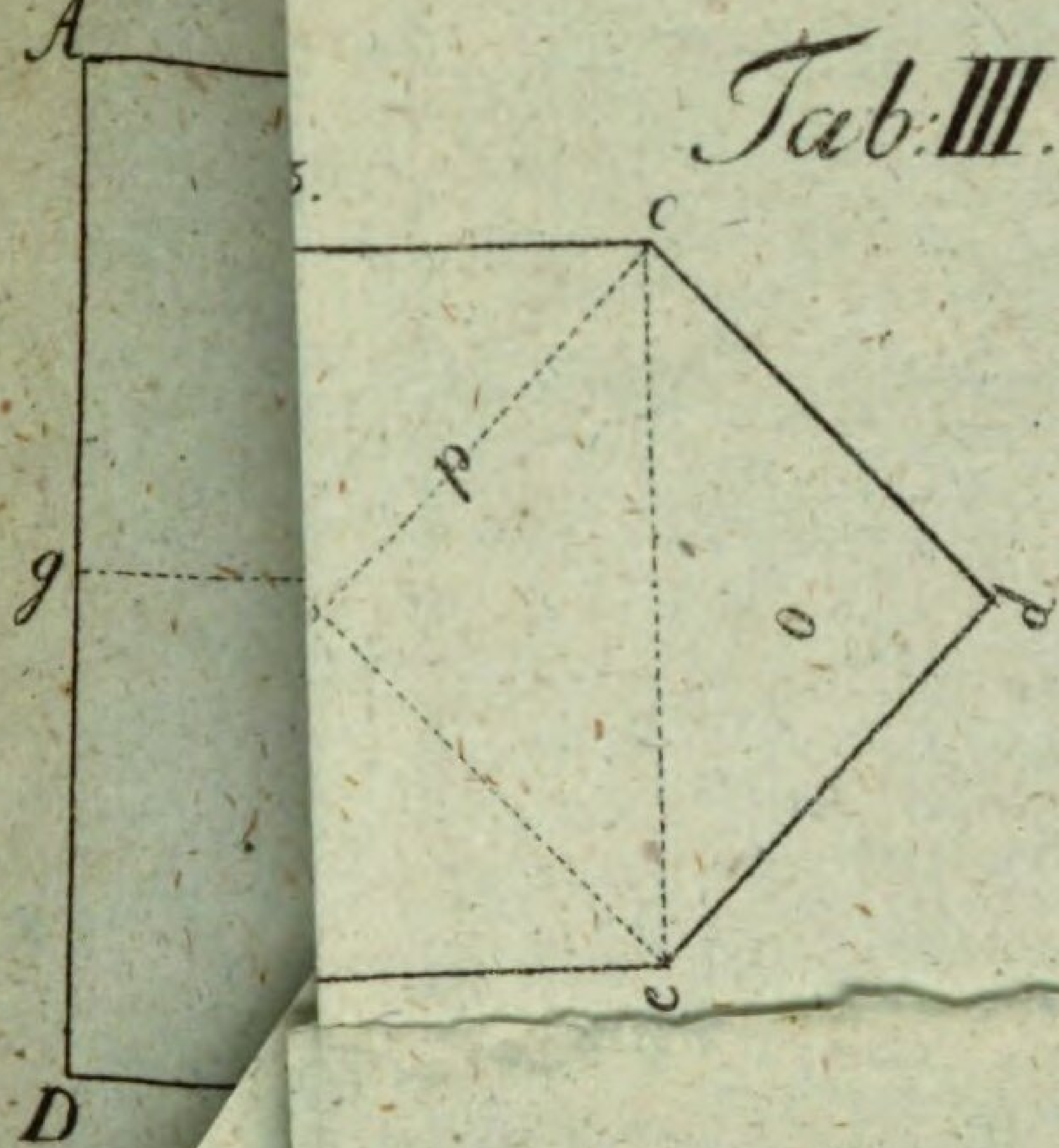


Fig: 19.



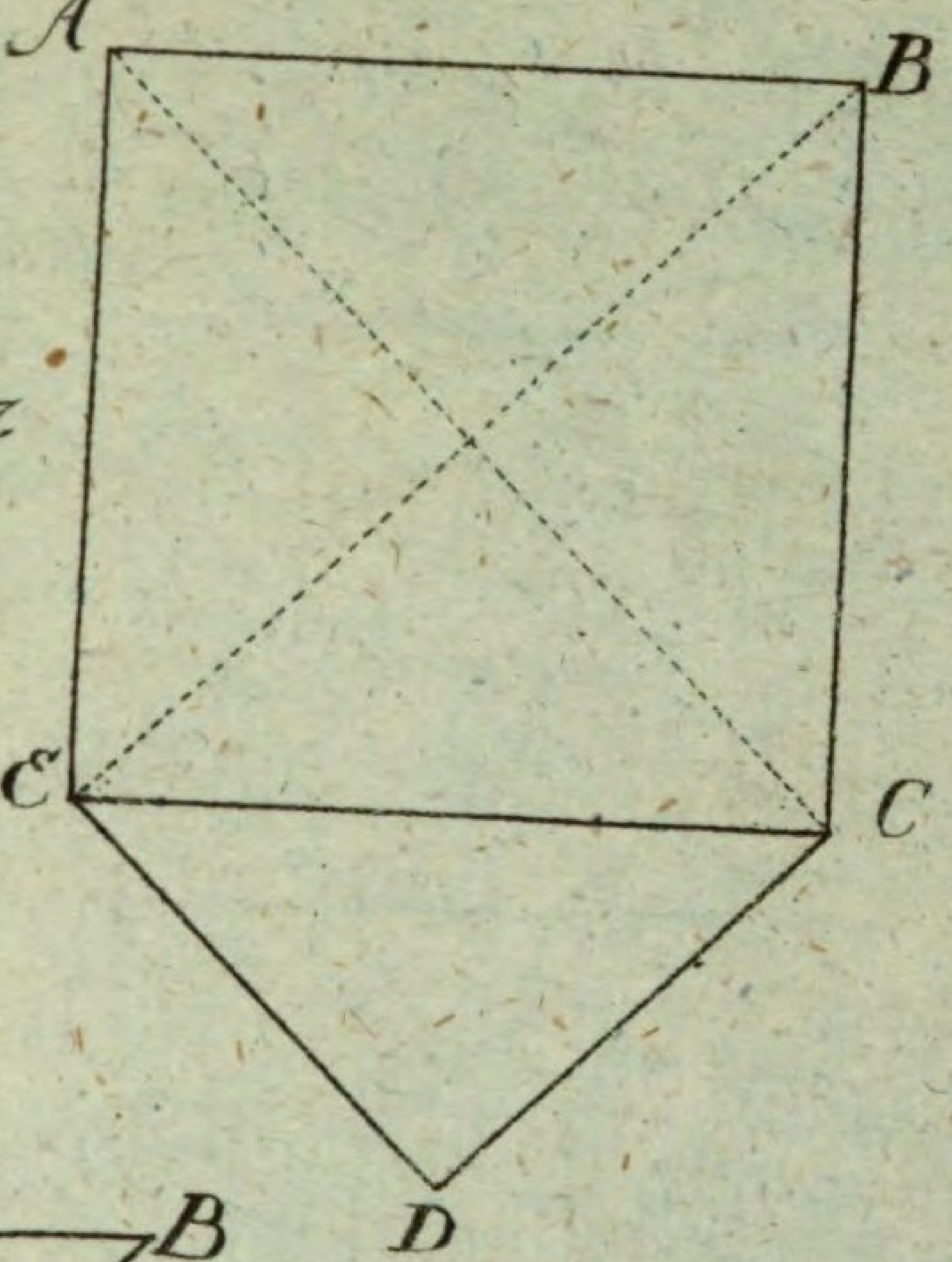


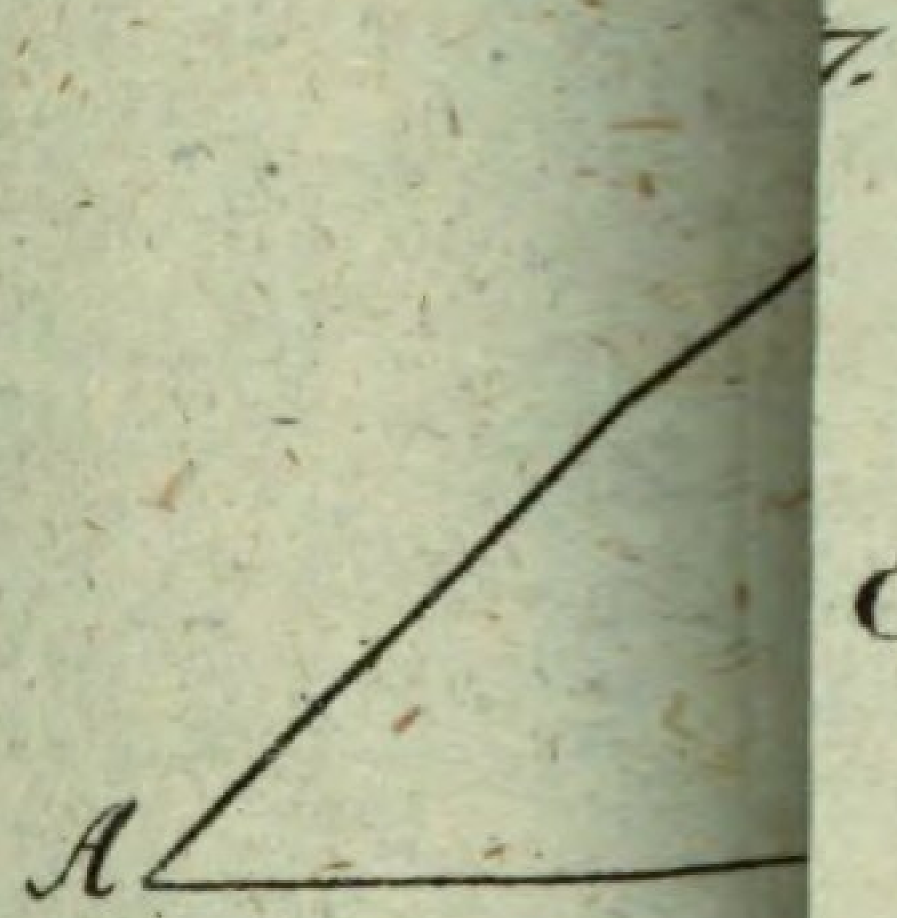
Tab: III.

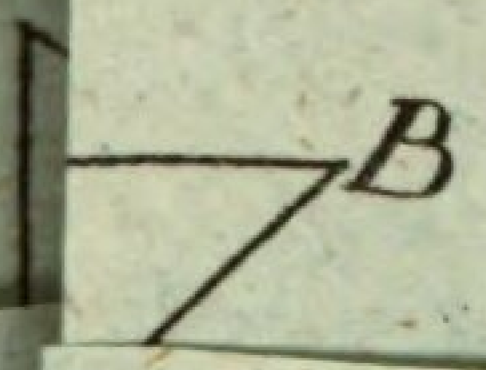


D

Tab: IV.







BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Pöhlmann, Johann Paul,

Unterhaltungen über stereometrische Wahrheiten

Erlangen 1815

Math.p. 429
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082577-8